ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA LINEAL A PARTIR DE UNA MIRADA CUALITATIVA DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Teaching linear algebra from a qualitative view of systems of linear equations

•••

Ensino de álgebra linear a partir de um olhar qualitativo sobre sistemas de equações lineares

Por:

Leonel Monroy Guzmán[1]
Departamento de matemáticas, Universidad del Valle, Cali, Colombia.
leonelmonroyguzman@gmail.com
iD: 0000-0001-8954-9726

Recepción: 12/08/2022 • **Aprobación:** 12/12/2022

Resumen: Se presenta una reflexión a partir del trabajo de Leonhard Euler: "*Sobre una aparente contradicción en la teoría de las líneas curvas*", mostrando la proximidad de esta obra con algunos de los principales conceptos del álgebra lineal. Se aplica una aproximación documental, no exhaustiva, para señalar, tanto en el contexto histórico de las matemáticas, como en el salón de clases, cómo la aparición de nuevos métodos de solución (algoritmos) pueden tener un efecto retardante en la construcción de nuevos conocimientos, y por último, se caracteriza y presenta el obstáculo epistemológico llamado "El paradigma de la solución".

Palabras claves: Enseñanza de las Matemáticas; Álgebra; Geometría.

Abstract: A reflection on Leonhard Euler's article "On an apparent contradiction in the theory of curved lines" is presented, showing the proximity of this work with some of the main concepts of linear algebra. A non-exhaustive documentary approach is applied, to point out, both in the historical context of mathematics and in the classroom, how the appearance of new solution methods (algorithms) can have a retarding effect on the construction of new knowledge, we finally characterize and present the epistemological obstacle that we call "The paradigm of the solution".

Keywords: Mathematics education; Algebra; Geometry.

Resumo: Apresenta-se uma reflexão sobre o artigo de Leonhard Euler "Sobre uma aparente contradição na teoria das linhas curvas", mostrando a proximidade deste trabalho com alguns dos principais conceitos da álgebra linear. Aplica-se uma abordagem documental não exaustiva. tanto no contexto histórico da matemática quanto na sala de aula, como o surgimento de novos métodos de solução (algoritmos) pode ter um efeito retardador na construção de novos conhecimentos, por fim caracterizamos e apresentamos o obstáculo epistemológico que chamamos de "O paradigma do solução".

Palavras-chave: Ensino de matemática; Álgebra; Geometría.

¿Cómo citar este artículo? / How to quote this article?
Monroy Guzmán, L. (2021). Enseñanza del álgebra lineal a partir de una mirada cualitativa de los sistemas de ecuaciones lineales. *Praxis, Educación y Pedagogía* (8), e4012408 https://doi.org/10.25100/praxis_educacion.v0i8.12408

Introducción

En la enseñanza universitaria del álgebra lineal se señalan como problemáticas esenciales: la desconexión de los conocimientos a construir con las bases logradas a través de la enseñanza previa del álgebra básica, el formalismo presente en el requerimiento de demostraciones desde los temas iniciales, la gran cantidad de nuevas definiciones y teoremas que aparecen en cada clase y finalmente, el enfoque en los algoritmos de solución y sus respectivos procedimientos, asociados antes que en el análisis de la relación de los resultados obtenidos entre los diferentes sistemas de representación y la teoría (Dogan, 2019; Dorier, 2000; Kazunga y Bansilal, 2020; Oktaç, 2018; Stewart y Thomas, 2019; Turgut, 2021). En este documento se contrastan los hechos presentados en el contexto histórico donde el enfoque cualitativo de Leonhard Euler (1707-1783) en la solución de sistemas de ecuaciones lineales pudo haber gestado el surgimiento de algunos conceptos básicos del álgebra lineal, con la aparición de la regla de Cramer y su empleo operativo que, como consecuencia. termina opacando el énfasis cualitativo y retardando por al menos un siglo los conceptos que habían asomado.

La aparente contradicción en la teoría de las líneas curvas

Euler (1750), inicia subrayando que la geometría, a diferencia de otras ciencias, está basada en las más rigurosas demostraciones y que no es posible encontrar dos de sus resultados que puedan dar lugar a controversia o contradicciones. Después de destacar la coherencia entre los conceptos de la geometría, luego, en contraste, muestra dos resultados ampliamente conocidos y aceptados por los matemáticos de su época, que entran en lo que él llama una aparente contradicción. Euler (1750), plantea lo que se conoce como la *paradoja de Cramer* amparado en dos resultados ampliamente conocidos para esa época:

I. Una curva plana C de grado n, está determinada de manera <u>única</u> por $\frac{n\,(n+3)}{2}$ puntos.
II. Dos curvas planas C_1 y C_2 de grado n, se pueden cortar en n^2 puntos.

Era claro que los puntos, en ambos resultados, debían cumplir "ciertas" *condiciones*; por ejemplo: para una curva de grado uno (una recta), dos puntos distintos la determinan de manera única; por otro lado, dos rectas distintas se pueden cortar en un punto, cumpliéndose así para $n = 1$, sin ninguna contradicción, los dos resultados. De manera similar se puede probar que, para el caso $n = 2$ los dos resultados se cumplen sin problema alguno. En ambos casos el número máximo de puntos en que pueden coincidir las curvas es menor al número de puntos que se requieren para determinar una de las curvas de manera única; este hecho parece muy natural ya que si se requiere más precisión; es decir, una curva única, se deben aportar más datos. Para ejemplificarlo tomemos el caso de las curvas de grado dos, en las que se encuentran las cónicas, si se tienen cuatro puntos distintos, con la condición de no ser colineales de a tres, podemos encontrar al menos dos cónicas distintas que los contengan y con un punto adicional, que cumpla la condición anterior, se obtiene una única cónica.

En la Figura 1 se muestran dos cónicas, de las infinitas, que comparten cuatro puntos. Fue necesario, en cada caso, dar un quinto punto para obtener una cónica en particular. En el caso de las curvas de grado 3, dados nueve puntos distintos, por el resultado dos, cabe la posibilidad de que dos cúbicas los contengan. En efecto, habría que adicionar un nuevo o nuevos puntos para determinar una única cúbica, es decir, resulta necesario más de $\frac{n\,(n+3)}{2}$ puntos para determinar una de ellas de manera única, lo que contradice el primer resultado ¡paradoja!

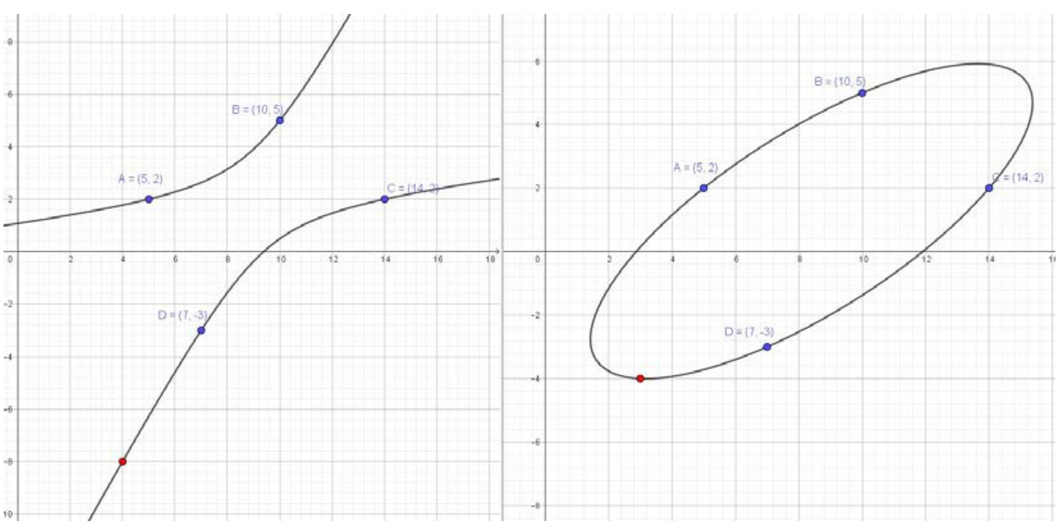

Figura 1. Construcción en GeoGebra de dos cónicas que comparten cuatro puntos

Según Boyer (2001), el problema había sido planteado primero por Colin Maclaurin, en el texto *Conics and Cubics* (Bix, 2006), se indica que Maclaurin planteó el problema en 1720 y que Cramer, citando a Macclaurin, también lo publicó en el año 1750. El físico alemán Julius Plüker (1801-1868), resuelve el problema explicando que, efectivamente, dos curvas de grado n pueden cortarse en n^2 puntos, pero solo $\frac{n\,(n+3)}{2}-1$ son *independientes*. En efecto, si se tienen los n^2 puntos que pertenecen a dos curvas de grado n tendremos que agregar un punto *independiente* para completar los puntos necesarios que determinen la curva de manera única (Howson, 1974). Por ejemplo, para el caso $n = 3$, dados nueve puntos en el plano donde se cortan dos curvas, si se plantea un sistema 9×9, este resultará de rango 8. Dando valores a la variable libre se podrá encontrar cualquier curva de las infinitas que pasan por los nueve puntos que dieron lugar al sistema. Para obtener un sistema con solución única, se deberá agregar una ecuación más que provenga de un punto independiente; es decir, con el que se obtenga una ecuación de tal forma que el sistema tenga rango 9.

Euler y una histórica primer mirada cualitativa a los sistemas de ecuaciones lineales

En el trabajo de Euler (1750) se contrastan los resultados I, II y una creencia generalizada de los matemáticos hasta su época. Inicialmente realiza algunas observaciones con respecto a la solución de sistemas de ecuaciones 2×2 donde Euler manifiesta que puede ocurrir que dos ecuaciones no sean suficientes para determinar el valor de dos incógnitas, aun cuando en ambas ecuaciones aparezca cada una de ellas, y da como ejemplo el sistema:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ 6x - 4y &= 10 \end{aligned}$$

Como observamos, en este sistema las ecuaciones son diferentes, pero se debe hacer la restricción que una de ellas no sea múltiplo de la otra. Presenta también un segundo caso, similar al anterior para los sistemas 3×3, en el cual, las ecuaciones 1 y 3 presentan la misma situación que las dos ecuaciones del sistema anterior:

$$\begin{aligned} 4x - 6y + 10z &= 16 \\ 3x - 5y + 7z &= 9 \\ 2x - 3y + 5z &= 8. \end{aligned}$$

Luego muestra un caso más elaborado:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 8 \\ 3x - 5y + 7z &= 9 \\ x - y + 3z &= 7. \end{aligned}$$

y adiciona a la restricción anterior la siguiente: para que un sistema cuadrado tenga única solución debe tenerse en cuenta, además, que ninguna de las ecuaciones esté contenida entre las otras. La importancia del trabajo de Euler se centra en el cambio de perspectiva con la que analizó los sistemas de ecuaciones lineales (Monroy Guzmán, 2011). Aunque parezca extraño, los matemáticos de la época de Euler resolvían solo sistemas de ecuaciones lineales $n \times n$, por lo que se subraya que, si al resolver un sistema lineal se desvanecía una ecuación o el sistema resultaba inconsistente, era dejado de lado con el argumento de estar mal planteado, como se señala en Bourbaki (2007, p. 79):

> Los Tratados de Álgebra, hasta el siglo XVIII, creen haberlo hecho todo, en lo que se refiere al primer grado, en cuanto enunciaron estas reglas; en cuanto a un sistema con tantas ecuaciones como incógnitas (no consideran otras) donde los primeros miembros no serían formas linealmente independientes, invariablemente se contentan con observar de pasada que esto indica un problema mal planteado.

En la actualidad sabemos que es mediante el estudio de los sistemas lineales con infinitas soluciones e incluso inconsistentes que podemos llegar a la idea de un conjunto con infinitos elementos. El conjunto solución en este caso, puede ser generado por un subconjunto finito de sus elementos. También es desde el análisis o depuración de estos *conjuntos generadores* mediante los conceptos de *combinación lineal e independencia lineal* que se logra establecer el conjunto mínimo de elementos que puede formar un conjunto generador y aproximarnos así a los conceptos de *base* y *dimensión* (Parraguez, 2009).

Luego de las observaciones hechas por Euler (1750), sobre las relaciones que debían tenerse en cuenta entre las ecuaciones de un sistema lineal y la solución única:

> Si uno tiene tantas ecuaciones como incógnitas de un sistemas de ecuaciones lineales puede suceder que una o más de las incógnitas permanezca indeterminada si una de la ecuaciones es igual o es un múltiplo de otra o si una de ellas está contenida entre las demás (p. 226).

Era de esperarse que el concepto de dependencia lineal surgiera muy cercano a este trabajo de Euler, pero no fue así, apareció más de un siglo después.

El paradigma de la solución: Caracterización de un obstáculo epistemológico

El nuevo enfoque de Euler es desestimado por el surgimiento de la obra de Cramer, quien se interesa en la solución de los sistemas lineales cuadrados con solución única por medio del algoritmo hoy conocido como la *Regla de Cramer*; es decir, en esta época prevaleció el enfoque cuantitativo, vigorizado por la obra de Cramer, frente al enfoque cualitativo propuesto por Euler con respecto a los sistemas de ecuaciones lineales. Como se señaló más arriba, hasta mediados del siglo XVIII los matemáticos compartían la noción de que todo sistema de ecuaciones lineales cuadrado tiene solución y es única. Esta creencia los hacía rechazar todo sistema que no tuviera solución única, explicando que este hecho se debía a que el sistema estaba mal planteado, por lo cual los sistemas no cuadrados no eran objeto de estudio.

Así, en 1750 Euler plantea la primera situación problemática marcando el camino con el potencial para iniciar el estudio cualitativo de las ecuaciones. Sin embargo, como se señaló antes, la obra de Euler no fue cercana al surgimiento del concepto de dependencia e independencia lineal, pues tanto el surgimiento de estos conceptos como el de rango tardarían algo más de 120 años en surgir (Dorier, 2002). Lo anterior nos muestra claramente que estamos frente a un retardante de la evolución de los conceptos de dependencia e independencia lineal, y a sus conceptos conexos como el caso de rango, conjunto generador y en general su línea evolutiva que da origen al cuerpo teórico del álgebra lineal. Ahora bien, desde la perspectiva de la didáctica estamos ante un obstáculo epistemológico (Brousseau, 2002), pues hace parte del conocimiento y se muestra resistente al cambio entre otras características. La creencia que todo sistema de ecuaciones lineales tiene solución única, hacía que los matemáticos de todas las épocas hasta el siglo XVIII fijaran su mirada en las ecuaciones, desde el punto de vista de la solución; los matemáticos de la época no dirigían su atención al enfoque cualitativo de las ecuaciones lineales para determinar la naturaleza de la solución, por el contrario, a partir del surgimiento de un nuevo método de solución de ecuaciones lineales que se conoce ampliamente como la regla de Cramer, no sólo mantuvieron la atención en lo que, en este documento se llama "El paradigma de la solución", sino que incrementaron la investigación buscando mejorar la novedosa regla de Cramer. Como consecuencia los matemáticos de la época desconocen e ignoran la nueva perspectiva de Euler.

Dorier (2002), señala que el aporte de Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) nos muestra con claridad que es desde la perspectiva de Euler que se pueden alcanzar conceptos tan fundamentales como independencia y dependencia lineal, rango y base. Lo establecido por Frobenius tiene su interés en el hecho que se alcanzan dos ejemplos simultáneos de espacio vectorial: el de las soluciones y el de todas las ecuaciones que están contenidas entre las del sistema inicial. Otro aspecto que se subraya es que todo esto se puede lograr en medio del análisis de los sistemas lineales, noción a la que se tiene acceso tempranamente en la escolaridad.

Chavarría Bueno (2019), a lo largo de su análisis histórico, señala la preocupación de los matemáticos por encontrar el método por radicales para encontrar la solución a las ecuaciones de distinto grado. Durante la prevalencia de la geometría euclidiana como campo formal de las matemáticas, se abordan, en especial, las ecuaciones lineales y cuadráticas. Generalmente, se desarrollan métodos de solución con su sustento en la estructura teórica que ofrecía la geometría. Chavarría Bueno (2019) señala cómo la noción de número se gesta paralelamente con la evolución de la teoría de ecuaciones. En efecto, si bien el concepto de número ostenta su propia epistemología en los procesos de solución de las ecuaciones, pues la solución de un problema en la teoría de ecuaciones traía como consecuencia la extensión de la noción de número, para llegar a la construcción de los números reales, por otro lado, parece acuñar la idea de que existe un método, una especie de fórmula cuadrática, como en el caso de las ecuaciones de segundo grado, para resolver cualquier ecuación. La certeza del hallazgo de la solución genera lo que llamamos "El paradigma de la solución" que, en el caso de los sistemas de ecuaciones lineales, trae dos consecuencias que se dieron en el contexto histórico de la emergencia de los principales conceptos del álgebra lineal y se repite en las concepciones, en el sentido que le da Simon (2017), de los estudiantes en los salones de clase:

1. *El rechazo a los sistemas de ecuaciones lineales no cuadrados.* La certeza que se tenía hasta el siglo XVIII, de que el número de soluciones de una ecuación, con coeficientes reales, en una variable, dependía del grado de la ecuación, desemboca en la siguiente creencia de la comunidad matemática, para el caso de los sistemas de ecuaciones lineales: "Para hallar n incógnitas es necesario n datos" y por supuesto, si se obtiene un sistema con infinitas soluciones o inconsistente, conclusión, hay algo errado entre los datos.
2. *La obcecación por los métodos de solución.* Aunque el punto de vista adoptado por Euler dirigió la mirada hacia el estudio de las ecuaciones y la relación entre ellas, separándola del

> problema de donde provienen, los matemáticos de la época mostraron su motivación real: encontrar la manera más eficiente o sofisticada para hallar la solución de un sistema de ecuaciones. Por su parte, los estudiantes, en un número considerable, prestan atención solo hasta que se describe el método para resolver.

Hemos encontrado textos universitarios como Grossman y Flores Godoy (2012) que presentan el método de Cramer como una alternativa de solución, lo que muestra el desconocimiento o la no toma de conciencia de lo que se presentó históricamente. La emergencia de la regla de Cramer no sólo lleva a los matemáticos a volver sobre "El paradigma de la solución", sino que, debido a su alto costo algorítmico, resultaba ineficiente por su alto costo operacional; al respecto Martínez y Sanabria (2014) señalan:

> El álgebra lineal es una de las bases de la matemática en general. Su importancia se acentúa aún más, desafortunadamente, muchos textos (y por lo tanto los cursos que lo usan) dan un énfasis "computacional" a la teoría y la notación, no sólo descuidando el verdadero aspecto computacional y numérico, sino que también desorientan al lector o al estudiante en lo que a cálculos se refiere (p. 96).

La crítica la hacen tomando en cuenta la complejidad de lo que se toma como algoritmo. Se muestra, en este artículo, cómo algunos textos dejan de manifiesto la idea que, hallar la inversa es un método para resolver sistemas de ecuaciones lineales, esto es: dado un sistema $n \times n$ con matriz de coeficientes invertible:

$$Ax = b.$$

Se propone, para resolverlo, realizar el proceso para hallar la inversa A^{-1} y multiplicarlo por el vector b:

$$x = A^{-1}\, b.$$

La crítica de los profesores Martínez y Sanabria (2014), se fundamenta en este caso en que, para calcular la inversa es necesario calcular n- sistemas y finalmente realizar el producto

$$A^{-1}\, b.$$

Mientras que el problema original consistía en resolver un único sistema, el primer capítulo de Martínez y Sanabria (2014) subraya cómo los autores de estos textos no separan la importancia teórica de algunos conceptos o teoremas de los algoritmos; como es el caso de la matriz cambio de base T (ver Figura 2):

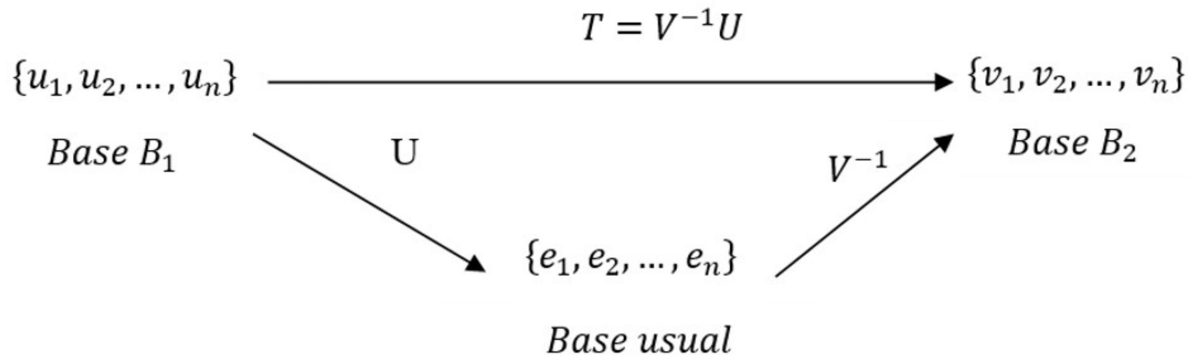

Figura 2. Esquema del proceso cambio de base, entre bases no usuales.

Dado un vector x_1, de coordenadas en la base B_1, se pide hallar su vector x_2, de coordenadas en la base B_2, considerando que B_1 y B_2 no son la base usual o su equivalente. El problema se torna complejo puesto que la matriz cambio de base es $T = V^{-1}U$ (teóricamente), se propone en estos textos calcular V^{-1}, pero esto no es necesario pues al resolver el sistema que resulta: $Ux_1 = Vx_2$ nos lleva a la solución con un menor costo computacional.

Con base en dos conceptos del álgebra lineal numérica: complejidad y análisis del error, donde el primero hace referencia al número de operaciones, en este caso se hace con respecto al número de multiplicaciones que requiera un algoritmo frente a un problema. El que deba realizar menos operaciones, es, sin duda, desde este aspecto el menor; pero, además, se debe pasar por la estabilidad, la cual se mide con el análisis del error. Teniendo en cuenta estos criterios se compara el costo de resolver sistemas $n \times n$ con el método de la regla de Cramer vs. el algoritmo de eliminación de Gauss, saliendo muy mal librado el método dado en la regla de Cramer.

Conclusiones

El análisis histórico epistemológico, en el sentido de Sierpińska (1988), del trabajo de Euler, nos muestra que los conceptos de dependencia e independencia lineal emergen de manera natural del estudio de los sistemas con infinitas soluciones desde un enfoque cualitativo. En contraste, en los libros de texto de mayor uso en los cursos de álgebra lineal en diferentes idiomas, tales como Kolman y Hill (2006, pp. 3-39), Grossman y Flores Godoy, (2012, pp. 1-68), se estudian los sistemas de ecuaciones lineales con infinitas soluciones e incluso aquellos que resultan inconsistentes; por lo que en general, orientan sus esfuerzos de instrucción en presentar algoritmos para llevar los sistemas a una forma escalonada, con la meta de presentar pautas generales a partir de la forma escalonada del sistema o de la matriz ampliada del sistema, que les permita decidir la naturaleza de la solución. Recaen en lo que hemos llamado "El paradigma de la solución"; no se abordan en general preguntas como: ¿cuál es la relación existente entre las ecuaciones de un sistema donde finalmente desaparece alguna(s) de ellas? ¿qué pasa con aquellas en este mismo sentido donde el sistema resulta ser inconsistente?, es decir, el esfuerzo no recae en encontrar la relación existente entre las ecuaciones para asociarla a la naturaleza de la solución. Por ejemplo: Dado el sistema de ecuaciones lineales 3×3.

$$\begin{aligned} x + y - z &= -1 \\ x - 2y + z &= 6 \\ 3x - 3y + z &= 11 \end{aligned}$$

Al realizar las siguientes operaciones elementales:

$$\begin{aligned} E_2 &\to E_2 + (-1)E_1 \\ E_3 &\to E_3 + (-3)E_1 \\ E_3 &\to E_3 + (-2)E_2 \end{aligned}$$

Para obtener la siguiente forma escalonada del sistema:

$$\begin{aligned} x + y - z &= -1 \\ -3y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

La idea desde la perspectiva de Euler es encontrar de qué manera la tercera ecuación está incluida en las primeras dos ecuaciones, para concluir finalmente que esta es esencialmente la razón por la cual el sistema tiene infinitas soluciones. Observemos que la idea de estar incluida no es más que una noción previa del concepto de dependencia lineal.

La historia nos presta ese montículo de observación (Artigue, 2018), desde donde podemos advertir que, si se privilegia la solución frente al análisis cualitativo, se pierde la oportunidad natural de abordar los conceptos que hemos mencionado. Aunque desde nuestra postura se crítica el énfasis que se le da al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, desde lo que hemos llamado "El paradigma de la solución", es importante remarcar que no sólo se hace ese énfasis, sino que se sigue fomentando este foco de obstáculos a través de libros de texto de amplia circulación

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2018). Epistemología y didáctica. *El Cálculo y Su Enseñanza, 11*, 1–31. https://recacym.org/index.php/recacym/article/view/26

Bix, R. (2006). *Conics and Cubics. A Concrete Introduction to Algebraic Curves*. Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-39273-4_3

Bourbaki, N. (2007). *Elements d'histoire des matehmatique*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-33981-6

Boyer, C. B. (2001). *Historia de la matemática*. Alianza Editorial. S. A.

Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Mathematics Education Library. https://doi.org/10.1007/0-306-47211-2

Chavarría Bueno, S. L. (2019). *Historia del concepto de espacio vectorial, con consideraciones sobre la enseñanza del álgebra lineal en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle* [Tesis de maestría, Universidad del Valle]. Repositorio institucional. https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/14091

Dogan, H. (2019). Some aspects of linear independence schemas. *ZDM, 51*(7), 1169–1181. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01082-4

Dorier, J.-L. (2000). Epistemological Analysis of the Genesis of the Theory of Vector Spaces. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 3–81). https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_1

Dorier, J.-L. (2002). *On the Teaching of Linear Algebra*. Mathematics Education Library. https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4

Euler, L. (1750). Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes. *Mémories de l'académie Des Sciences de Berlin, 4*, 219–233.

Grossman, S. I., y Flores Godoy, J. J. (2012). Álgebra Lineal (7° Ed). The McGraw-Hill. https://www.academia.edu/39168811/%C3%81lgebra_lineal_Stanley_I_Grossman_S_and_Jos%C3%A9_Job_Flores_Godoy_7ED

Howson, A. G. (1974). Review of Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. *The Mathematical Gazette, 58*(403), 58–59. https://doi.org/10.2307/3615488

Kazunga, C. y Bansilal, S. (2020). An APOS analysis of solving systems of equations using the inverse matrix method. *Educational Studies in Mathematics, 103*(3), 339-358. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09935-6

Kolman, B., y Hill, D. R. (2006). Álgebra Lineal (8° Ed.). Pearson Education, Inc. https://www.academia.edu/42188978/Algebra_Lineal_Bernard_Kolman_y_David_R_Hill_Octava_Edici%C3%B3n

Martínez, H. J., y Sanabria, A. M. (2014). Álgebra Lineal (Primera). Programa Editorial Universidad del Valle. https://programaeditorial.univalle.edu.co/gpd-algebra-lineal-9789587650945-633217fc97763.html

Monroy Guzmán, L. A. (2011). *El Álgebra Lineal en el contexto histórico de las Matemáticas* [Tesis de maestría, Universidad del Valle]. https://tinyurl.com/wqubabm

Oktaç, A. (2018). Conceptions About System of Linear Equations and Solution. In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman, & M. Zandieh (Eds.), *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 71–101). https://doi.org/10.1007/978-3-319-66811-6_4

Parraguez, M. (2009). *Evolución Cognitiva del Concepto de Espacio Vectorial.* [Tesis doctoral, Instituto Politécnico Nacional]. Repositorio Dspace https://tesis.ipn.mx/handle/123456789/11764

Sierpińska, A. (1988). Epistemological obstacles in teaching mathematics. *Didactica Mathematicae*, *8*(1). https://eudml.org/doc/295203

Simon, M. A. (2017). Explicating mathematical concept and mathematical-conception as theoretical constructs for mathematics education research. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(2), 117–137. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9728-1

Stewart, S., y Thomas, M. O. J. (2019). Student perspectives on proof in linear algebra. *ZDM*, *51*(7), 1069–1082. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01087-z

Turgut, M. (2021). Reinventing Geometric Linear Transformations in a Dynamic Geometry Environment: Multimodal Analysis of Student Reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *20*(6), 1203–1223. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10185-y

Notas

[1] Mg. en Ciencias Matemáticas, Universidad del Valle, Cali, Colombia. Docente, Departamento de matemáticas, Universidad del Valle, Cali, Colombia. Correo electrónico: leonelmonroyguzman@gmail.com ORCID: 0000-0001-8954-9726