Aproximación a la interdisciplinariedad entre astronomía y geometría en la educación matemática

Exploring interdisciplinary connections between astronomy and geometry in mathematics education

•••

Uma exploração da interdisciplinaridade entre a astronomia e a geometria na educação matemática

Por:

Juan Sebastián Luna Corredor [1]
Universidad del Valle, Cali, Colombia.
juan.sebastian.luna@correounivalle.edu.co
iD : 0009-0003-8954-250X

Recepción: 07/04/2023 • **Aprobación:** 03/08/2023

Resumen: La interdisciplinariedad entre la astronomía y la geometría surge como resultado de una profunda reflexión pedagógica y didáctica en la enseñanza de las matemáticas. Se presentan algunos hechos históricos relevantes a esta conexión de las disciplinas, como la medición de Eratóstenes, los epiciclos, el movimiento retrógrado de Kepler, dos tipos de telescopios (Galileano y Newtoniano) y las geometrías no euclidianas. Se aborda la interculturalidad en el aula y la importancia de los contextos. También se precisa algunos puntos de la relación de la demostración matemática con la resolución de problemas en la Astronomía. Se incluyen dos ejemplos: uno de demostración y otro de modelación, ambos utilizando la geometría en el ámbito de la astronomía. El objetivo principal es mostrar y construir un modelo discursivo que permita al estudiante integrar conceptos de ambas disciplinas en su argumentación, ejemplificando la estrecha conexión que existe entre estas áreas del conocimiento y su utilidad en el aula. Esto se traduce en mejoras en la atención de los estudiantes, un acercamiento no intrusivo al tema y la posibilidad de enseñar conceptos geométricos que generalmente resultan complejos.

Palabras clave: Astronomía; Enseñanza de las matemáticas; Geometría; Demostración matemática; Enseñanza de las ciencias; Resolución de problemas.

Abstract: The interdisciplinarity between astronomy and geometry arises from a deep pedagogical and didactic reflection on mathematics education. This article aims to present several historically significant connections between the two disciplines, including Eratosthenes' measurement of the Earth, epicycles, Kepler's retrograde motion, two types of telescopes (Galilean and Newtonian), and non-Euclidean geometries. It also addresses interculturality in the classroom and emphasizes the importance of context. Furthermore, the relationship between mathematical proof and problem-solving in astronomy is explored. Two examples are provided: one focused on proof and the other on modeling, both employing geometry within the context of astronomy. The main objective is to propose and construct a discursive model that enables students to integrate concepts from both disciplines into their reasoning, demonstrating the close connection between these fields of knowledge and their pedagogical value. This interdisciplinary approach enhances student engagement, provides a non-intrusive entry point into complex topics, and offers an effective means of teaching geometric concepts that are often considered difficult.

Keywords: Astronomy; Mathematics teaching; Geometry; Mathematical proof; Science teaching; Problem solving.

Resumo: A interdisciplinaridade entre a Astronomia e a Geometria emerge de uma reflexão pedagógica e didática aprofundada sobre o ensino de Matemática. Este artigo busca apresentar alguns fatos históricos relevantes que evidenciam essa conexão entre as duas disciplinas, como a medição de Eratóstenes, os epiciclos, o movimento retrógrado descrito por Kepler, dois tipos de telescópios (galileano e newtoniano) e as geometrias não euclidianas. Também são abordadas a interculturalidade em sala de aula e a importância dos contextos. Além disso, discute-se a relação entre a demonstração matemática e a resolução de problemas na Astronomia. Dois exemplos são incluídos: um voltado à demonstração e outro à modelagem, ambos utilizando a Geometria no contexto da Astronomia. O principal objetivo é apresentar e desenvolver um modelo discursivo que possibilite ao estudante integrar conceitos de ambas as disciplinas em sua argumentação, evidenciando a estreita conexão entre essas áreas do conhecimento e sua aplicabilidade em sala de aula. Essa abordagem contribui para um maior engajamento dos estudantes, uma introdução não intrusiva aos temas e uma forma eficaz de ensinar conceitos geométricos frequentemente considerados complexos.

Palavras-chave: Astronomia, Ensino de matemática, Geometria, Demonstração matemática; Ensino de ciências; Resolução de problemas.

¿Cómo citar este artículo? / How to quote this article?

Luna Corredor, J. S. (2023). Aproximación a la interdisciplinariedad entre astronomía y geometría en la educación matemática. *Praxis, Educación y Pedagogía*, (12), e40213348. https://doi.org/10.25100/praxis_educacion.v0i12.13348

Financiación

El autor declara que no recibió financiamiento para la escritura o publicación de este artículo.

Conflictos de interés

El autor declara que no tiene ningún conflicto de interés en la escritura o publicación de este artículo.

Implicaciones éticas

El autor no tiene ningún tipo de implicación ética que se deba declarar en la escritura y publicación de este artículo.

Introducción

La intercepción entre astronomía y geometría está entrelazada tanto con algunos hechos históricos que han marcado la civilización —los conceptos de interculturalidad, reconocimientos de los saberes ancestrales, diferentes cosmovisiones y diversos métodos del discurso en el aula— como los procesos cognitivos dentro de la demostración. Al introducir todos estos elementos que también corresponden a un discurso científico en la clase de matemáticas se plantea la necesidad de explorar preguntas filosóficas que guíen a los y las estudiantes hacia la búsqueda autónoma del conocimiento, alentados por el profesorado. El objetivo es que, a través de la argumentación, los y las estudiantes puedan construir proposiciones, fomentando una manera de pensar crítica y reflexiva; ideas referentes a las interpretaciones del universo, concepciones sociales sobre la ciencia, o lo que implica que la ciencia puede llegar a representar "la creencia en la ignorancia de los expertos" (Feynman, 2001, p. 37), todo esto dentro del modelo discursivo que se llevará a cabo, como señala Candela (1993) "la ciencia es una construcción social sujeta a ciertos procesos discursivos específicos" (p. 34).

Para respaldar los elementos discursivos de la disciplina y el contexto social, se propone la implementación de diversos métodos multimodales, que corresponden a diversas formas de comunicar distintos contenidos (visual, escrito, auditivo, etc.) (Tamayo *et al.*, 2018). Estos métodos permitirán orquestar diferentes momentos en la clase, lo que posibilitará la construcción mental de cómo entendemos fenómenos como la gravedad, las órbitas planetarias, la rotación y traslación de la Tierra, entre otros. De esta manera, los y las estudiantes podrán relacionar y transformar el conocimiento a través de la observación. Como señalan Tamayo *et al.* (2018) "El término orquestación resulta ser tan significativo, pues no se trata de emplear de manera indiscriminada los múltiples lenguajes, sino de reconocer cuál o cuáles resultan más apropiados a la hora de enseñar ciencias" (p. 64).

Entre lo discursivo hay varios aspectos como las interacciones con los cuerpos celestes como el Sol o la Luna (los movimientos planetarios que determinan el día y la noche) las diferentes fases de la Luna, la fuerza de atracción de la Tierra y la contemplación de las estrellas, entre otros aspectos; son situaciones vividas que observan y experimentan todos los seres humanos. Cuando se amplía esta interpretación del universo de una manera geométrica, se puede apreciar la complejidad que implica el manejo de los tratamientos figurales por cómo se está moldeando la idea de universo abierto. En este contexto, el discurso se convierte en una parte fundamental al momento de hacer la conversión de dos registros diferentes, pasando del gráfico (formas de representar el universo) al discursivo (cómo se expresa) (Duval, 2017). Esto corresponde a una forma en la que se puede entender la demostración desde esta interdisciplinariedad, la cual cobra sentido en su modelación física y matemática.

Vivimos en un mundo tridimensional compuesto por ancho, largo y profundo, que corresponden a las dimensiones visibles, esto permite reflexionar sobre el desarrollo del pensamiento espacial que ha permitido a la humanidad cuantificar el universo, lo que resulta enriquecedor dentro del aula, ya que "De acuerdo con la hipótesis planetaria de Tolomeo, el radio del universo equivalía a cerca de 20.000 radios terrestres, lo que significa que el universo que concebían los antiguos era bastante pequeño" (Lanciano, 1989, p. 178) por ende, la concepción del tamaño del universo ha sido modificada al pasar el tiempo. Esto está estrechamente relacionado a la matemática y la astronomía, como señala Lanciano (1989, p. 176), "un problema importante, tanto en la enseñanza de las matemáticas, como en la enseñanza de la astronomía, es el que está ligado a la visión espacial, a la capacidad mental de ver en tres dimensiones". Esta habilidad se ha vuelto fundamental a medida que la comprensión del universo se ha expandido hacia la noción de un cosmos infinito.

Al comprender la estrecha relación que existe entre estas dos disciplinas y su utilidad en el aula, son necesarios varios elementos que abren la puerta a su aplicación. Por ello, se mostrará cómo los temas de la astronomía pueden contribuir al desarrollo de diversas habilidades del pensamiento geométrico. A continuación, se intenta presentar un breve resumen de algunos hechos astronómicos que han usado geometría, reconocimiento del contexto intercultural, los procesos cognitivos relacionados a una forma de ver la demostración en el aula y problemas geométricos con contexto astronómico. Esto con la intención de exponer cómo la interdisciplinariedad entre estas disciplinas puede incidir en el desarrollo de habilidades y conocimientos de los y las estudiantes para ayudar en su formación académica y ciudadana.

Breves hechos astronómicos relacionados con geometría

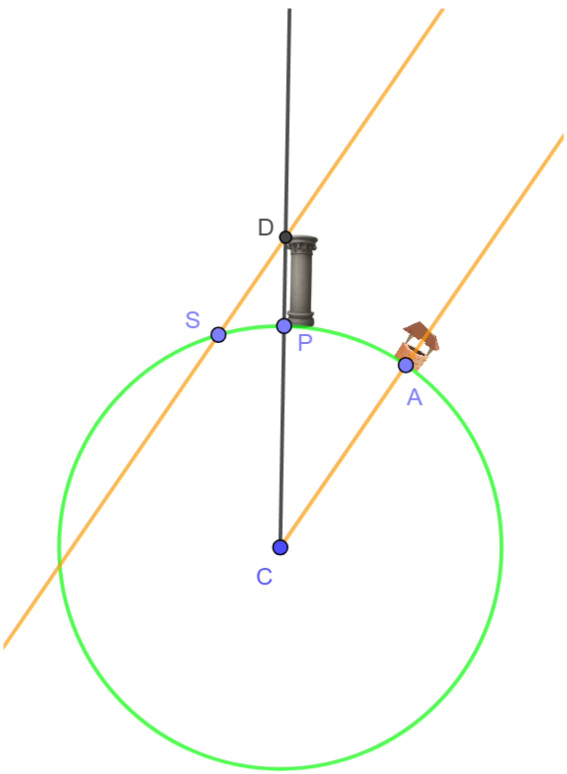
Se presenta, primeramente, la antigua cultura griega occidental, que ha influido en el pensamiento matemático a escala mundial. En los descubrimientos de la cultura griega, uno de los más notables en esta interdisciplinariedad fue realizado por Eratóstenes (c. 276-195 a.C.), quien midió la circunferencia de la Tierra utilizando diversos métodos de apreciación y cálculo de distancias entre dos ciudades (Alejandría y Siena). Usando geometría euclidiana pudo prever el resultado y sostener la hipótesis de que la Tierra es esférica. La medida dada por él es una aproximación increíblemente cercana a la estimación actual,

> En razón a que se cree que este sabio habría calculado el tamaño de un círculo mayor terrestre en 39.690 kilómetros, lo que es increíblemente cercano al resultado actual, igual a 40.120 Km, lo que arroja un error de un 1,07%. (Salinas, 2002, p. 143)

Eratóstenes notó ciertas particularidades en el solsticio de verano, lo que indicaba que las construcciones en el mediodía eran iluminadas por los rayos del sol (no tenían sombra) en la ciudad de Siena y que en Alejandría un obelisco tenía su respectiva sombra (Salinas, 2002). Con esta información Eratóstenes, como sus contemporáneos, supuso que los rayos solares caían de forma paralela (Lanciano y Berardo, 2016) partiendo de la idea de una Tierra esférica; con esto logró hallar el ángulo y medir la circunferencia de la Tierra.

Como se puede observar en la Figura 1, según Lanciano y Berardo (2016), Eratóstenes utilizó un cuenco hemisférico para medir la sombra. Este cuenco le permitía observar las sombras proyectadas por el gnomon al mediodía, lo que le ayudó a determinar el ángulo entre los rayos del Sol y la vertical en Alejandría. Conociendo el ángulo de SDP y utilizando la proporción de los ángulos, pudo calcular el ángulo PCA, lo que le permitió obtener el ángulo necesario para medir la circunferencia de la Tierra, ya que el arco representaba la distancia entre las dos ciudades. Sin embargo, Eratóstenes cometió ciertos errores e imprecisiones que no se tenían en cuenta en su época, como el hecho de que "Siena y Alejandría no están exactamente en el mismo meridiano" (Lanciano y Berardo , 2016, p. 17).

Figura 1. Representación del método de medición de Eratóstenes



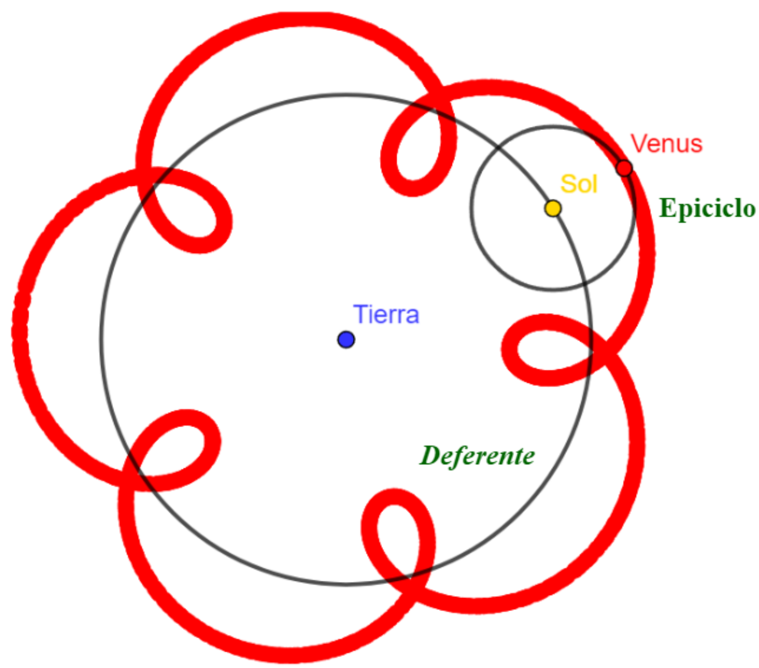
Nota. Construcción propia en GeoGebra de una representación de la medición de Eratóstenes. Elaborado en marzo de 2023.

Ahora se precisará los epiciclos, los cuales son la caracterización del movimiento retrógrado de los planetas que luego Johannes Kepler (1571-1630) investiga para realizar sus leyes. Esto se basa en la pregunta que realiza Platón (c. 427-347 a.C.) "¿Cuáles son los movimientos circulares uniformes cuya superposición reproduce el movimiento observado de los planetas?" (Peralta y Reyes, 2014, p. 522). Se resaltará el modelo de Ptolomeo (c. 90-168 d.C.), desarrollado en Alejandría, donde trabajaron grandes astrónomos como Aristarco (c. 310-c. 230 a.C.) e Hiparco (c. 190-c. 120 a.C.).

El deferente era un círculo pero su centro no coincidía con la Tierra sino que rotaba sobre otro círculo cuyo centro estaba a cierta distancia de la Tierra, por otra parte introdujo el ecuante, un punto desde el cual el movimiento de los centros de los epiciclos se movían con velocidad uniforme". (Peralta y Reyes, 2014, p. 522)

Por ende, el epiciclo es un concepto utilizado en la astronomía antigua para describir el movimiento aparente de los planetas desde la perspectiva de la Tierra, como parte del modelo geocéntrico, y no corresponden a las órbitas reales de los planetas, sino que son construcciones matemáticas de los antiguos.

Figura 2. Flor de venus



Nota. Construcción en GeoGebra del movimiento retrógrado planetario, movimiento de Venus. El punto azul es la Tierra como sistema de referencia principal, el punto amarillo es el Sol que se traslada respecto a la Tierra (día y noche, en perspectiva) y el punto rojo indica a Venus. Se describe el nombre de cada una de las circunferencias: la de radio mayor se llama deferente y de radio menor epiciclo. Elaborado en marzo de 2023.

Johannes Kepler (1571-1630) en su obra Misterium Cosmographicum (1596) hace una construcción geométrica del misterio del cosmos, que consiste en una inscripción de los planetas dentro de los cinco sólidos perfectos pitagóricos.

> La Tierra es el círculo que es medida de todo. Circunscríbele un dodecaedro. El círculo que lo circunscriba será Marte. Circunscribe a Marte con un tetraedro, el círculo que lo comprenda a éste será Júpiter. Circunscribe a Júpiter con un cubo. El círculo que comprenda a éste será Saturno. Ahora inscribe en la Tierra un icosaedro. El círculo inscrito en éste será Venus. Inscribe en Venus un octaedro. El círculo inscrito en él será Mercurio. Tienes la razón del número de los planetas. (Kepler, 1992, p. 70)

Los estudios de Johannes Kepler con los estudios previos de Tycho Brahe, lo llevaron a estudiar el movimiento de Marte, "la revisión de los datos acerca del movimiento retrógrado de Marte desembocó en el trabajo más importante de Johannes Kepler, la publicación en 1609 de la *Astronomia nova*" (Cortés, 2015, p. 3). El movimiento retrógrado planetario se refiere a la aparente reversión de la dirección de movimiento de los planetas desde la perspectiva en la Tierra como sistema de referencia, lo cual describe: en un punto dado, un planeta parece retroceder, dar un giro y luego continuar su órbita circular normal (esto en perspectiva, Figura 2). Esta representación espacial y visual se puede construir y modelar de manera efectiva utilizando elementos geométricos y físicos.

Estos breves destellos de la historia llenan de significado la enseñanza de la geometría. Hoy en día, no se trata solo de un conocimiento estático que permite a los docentes llenar el tablero de figuras y símbolos inmóviles. Como afirmaba Vasco (1992, p. 8), "esto no sería geometría, sino más bien el cadáver de la geometría". La astronomía es un ejemplo de cómo las matemáticas cobran vida; no permanece estática, y su comprensión no se limita a representarla en un plano bidimensional, ya que, al hacerlo, perderíamos la oportunidad de apreciar su belleza a través de la contemplación y la modelación de fenómenos astronómicos. Sin embargo, es posible representarla en un plano, pero al hacerlo de esta manera, estaríamos desaprovechando muchas oportunidades para ejercitar una forma de razonar más profunda y completa.

Esto también puede llevar a que en el aula de clases surjan diversas preguntas relacionadas con la filosofía de las matemáticas. Se centra en la cuestión fundamental de para qué son útiles las matemáticas, y que él o la estudiante logre buscar su propio significado a través de la historia. La interdisciplinariedad y la aplicación de conceptos matemáticos en la astronomía abren un camino sólido hacia su utilidad en el mundo real de una manera fascinante. Esto permite comprender lo que sucede más allá de lo que a menudo se percibe,

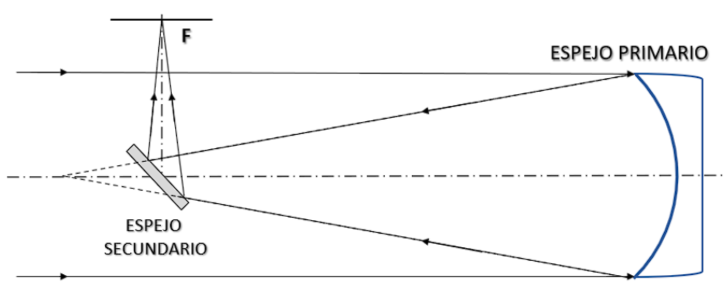
> Al respecto Muñoz et al. (2014) señalan que la modelación matemática es considerada un campo de investigación, en el que, emergen relaciones entre conceptos sobre los contextos, situaciones propias de la cultura y de las demás ciencias con la matemática. (Toledo y Cruz, 2018, p. 120)

Ya mencionado un objeto de estudio de la astronomía, los planetas, es necesario hablar de su observación y sus efectos, es importante destacar a Hans Lippershey (1570-1619), un astrónomo holandés que en 1608 diseñó un telescopio utilizando dos lentes convexos en serie en cada extremo de un tubo. Aunque Galileo Galilei (1564-1642) ya había oído hablar de este concepto, fue el primero en apuntar su telescopio al cielo (Schon, 2006), lo que le permitió realizar descubrimientos significativos que desencadenaron un acalorado debate en la época sobre el geocentrismo y heliocentrismo. Durante sus investigaciones, Galileo descubrió cuatro lunas en órbita alrededor de Júpiter, lo que puso en evidencia que no todo orbitaba en torno a la Tierra.

Galileo brinda importantes aportes respecto a la filosofía de las ciencias, entre ellos la reflexión de que la ciencia debe servir al ser humano, en otras palabras, pensar en los efectos que tiene la ciencia en lo social y no simplemente hacer ciencia para la ciencia (Núñez y Sánchez, 2010). Combinado con una nueva educación científica, que permite salir y observar el entorno (Lemke, 2006), se puede mencionar las constelaciones y asterismos que se pueden hacer geométricamente, o el significado que posee en diversas culturas.

Cuando se profundiza en el estudio de los telescopios, herramientas fundamentales para explorar los cielos, se puede notar que el telescopio newtoniano presenta una característica interesante: la presencia de la parábola en la construcción de su lente. Esto se debe a que el espejo principal debe tener una forma específica, en este caso un espejo primario parabólico (Figura 3), para permitir que la luz se refleje y sea observable a través del lente ocular. Esto ejemplifica que no solo se enriquece el conocimiento matemático, sino que también se observa su aplicación en la vida cotidiana, particularmente, a través del funcionamiento de un telescopio

Figura 3. Esquema del objetivo de un Telescopio Newtoniano



Fuente: Figura tomada de la tesis de Bocanegra y Cabrera (2023, p. 10).

La luz, al rebotar, incide perfectamente en el espejo secundario, que refleja la luz hacia el ocular. Existen espejos con diferentes superficies, como los espejos asféricos; "dentro de los espejos asféricos encontramos los espejos parabólicos, elípticos e hiperbólicos" (Bocanegra y Cabrera, 2023, p. 11). A continuación, se presentan dos fórmulas matemáticas sacadas de la Tesis de Bocanegra y Cabrera (2023) que permiten comprender ciertos aspectos del funcionamiento de un telescopio: la relación focal (Fr), que mide la distancia focal en función del diámetro del objetivo, y el radio de curvatura (R):

$$Fr = \frac{f}{d} \quad y \quad R = 2Fr$$

Al hallar esta relación existente entre la construcción de un telescopio y las matemáticas, se pretende demostrar cómo se complementan y se nutren ambas disciplinas antes mencionadas. No se profundizará en las fórmulas, ya que no es el objetivo de este apartado.

Un punto posterior en el desarrollo de la astronomía y la física teórica se relaciona con las geometrías no euclidianas, como la de Riemann (1826-1866), la cual es un perfecto ejemplo de esta intercepción. Este tipo de geometrías revolucionaron nuestra perspectiva sobre el universo. Por ejemplo, Albert Einstein basó su teoría de la relatividad en los resultados de la geometría de Riemann (Viveros, 2019), la cual se basa en la visualización de una esfera, como puede ser la Tierra, y se posicionan figuras geométricas en su superficie, modificadas por la forma del plano. Las geometrías no Euclidianas surgen de negar el quinto postulado de la geometría de Euclides, el cual indica que:

> Si una línea recta corta a otras dos líneas rectas de manera que la suma de los dos ángulos interiores de un lado sea menor que dos ángulos rectos, entonces las otras dos líneas rectas, si se prolongan lo suficiente, se cortarán al mismo lado de la primera línea en que se encuentran aquellos ángulos. (Petakos y Sgreccia, 2010, p. 5)

Reconocimiento del contexto

Pensar en la geometría como una herramienta para desarrollar los diversos tipos de razonamientos es esencial, y en su intersección con la astronomía, la cual es una ciencia con un contexto enriquecedor, no se puede pasar por alto el aspecto humano que ambos campos de conocimiento aportan. Esta conexión se extiende a las ciencias sociales (por el contexto mismo de la ciencia), brindando la oportunidad al profesor o la profesora de matemáticas de crear un espacio intercultural en el aula de clases, el cual le permite mostrar diversas concepciones del cielo y su significado cultural.

Usualmente, en el modelo multicultural, se observa que la cultura dominante tiende a prevalecer sobre las culturas no dominantes hasta ser consumidas, lo que puede limitar su desarrollo libre (Walsh, 2005). El contexto desempeña un papel crucial en la forma en que percibimos los conceptos, ya que estos se moldean en función de las condiciones culturales específicas. La cultura se concibe como un proceso de significados que se construye en actos de comunicación con otros (Austin, 2000). Es esencial reconocer el valor del conocimiento ancestral y otorgarle un lugar destacado en lo que se considera como la "cultura científica" (Gómez, 2012). En última instancia, se puede argumentar que todo "saber" es de naturaleza cultural, y esto incluye las matemáticas, lo cual permite cuestionar si todas las matemáticas son etnomatemáticas por provenir de un sistema cultural, las cuales ha creado un lenguaje para expresar el mundo. La matemática tiene características comunes, entre estas, que unifican la idea de esta disciplina como lenguaje de la ciencia; a pesar de usar diferentes sistemas semióticos la representación mental de número (u objeto matemático) sigue siendo el mismo concepto (Duval, 2017).

Por lo tanto, es fundamental llevar a cabo un proceso intercultural, reconociendo que existen diferencias significativas entre los conceptos de multiculturalidad y pluriculturalidad (Bernabe, 2012). Teniendo en cuenta que no solamente la astronomía involucra aspectos matemáticos, es importante comprender cómo esta rama de la ciencia afecta la vida de las personas. Construcciones como las Líneas de Nazca, la Pirámide de Chichén Itzá y la Piedra del Sol Maya son manifestaciones de cosmovisiones que permiten a las culturas tener una interacción constante con el universo. El principal objetivo de investigación en arqueoastronomía es el estudio de estos cultos (Esteban, 2013), ya que la necesidad de descubrir y comprender más allá de lo que se presenta es una inquietud que ha surgido en la humanidad.

En este caso, los astros no son entes ajenos; principalmente, la Luna tiende a ser un referente para ciertas culturas, como por ejemplo algunos rituales de danza en comunidades indígenas en adoración a ésta (Lehmann-Nitsche, 1923). Reconocer toda esta diversidad cultural permite formar un contexto y "como lo plantea Biembengut y Hein (2004), que las conexiones de los conocimientos matemáticos con los contextos, le permite al estudiante pensar y construir las matemáticas que tienen uso en otras disciplinas" (Toledo y Cruz, 2018, p. 117). De acuerdo con Paulo Freire (2014), la escuela debe ser una institución que refleje y hable sobre la realidad social, similar a lo que se denomina educación estadística cívica (Giordano *et al.*, 2022).

> Dicha transformación es alcanzable, al fomentar el estudio de las ciencias, en general y de la Astronomía, en específico, "ya que, al igual que las Matemáticas, la Astronomía ha sido, desde sus inicios, una actividad humana culturalmente mediada y una disciplina en desarrollo, las cuales han estado ligadas desde el comienzo de su aparición y durante el desarrollo de la humanidad, con cambios acerca de la forma de ver el mundo y el universo (Cárdenas, 2011, como se citó en Aguilera y Bolívar, 2022, p. 19)

Procesos cognitivos y la demostración

La demostración corresponde a una dificultad bastante amplia para muchos estudiantes, la cual se relaciona directamente con el gráfico que se emplea, teniendo en cuenta que "la imagen se caracteriza además por su polisemia, de modo que resulta muy difícil predecir cuál va a ser la interpretación que sobre una ilustración va a realizar una persona" (Perales y Jiménez, 2002, p. 371). Por ejemplo, en la descomposición de las figuras geométricas.

Un razonamiento profundamente ligado al lenguaje no necesita ser confirmado o invalidado por la experiencia de un individuo, ya que su validez o invalidez radica en su propia estructura lógica. Como señala Duval (2017, p. 232), "únicamente los razonamientos válidos tienen fuerza y valor objetivo de demostración". En geometría, esta actividad es aún más compleja debido a los sistemas de representación semióticos. Según Duval (2017), en este campo se requieren tres registros: el registro figural, el registro discursivo y el registro mixto. Este último actúa como un puente que interconecta los otros dos, ya que no es posible realizar una conversión directa entre ellos de manera global. Para que un o una estudiante pueda hacer y entender una prueba es necesario una doble conciencia que se subdivide en dos categorías, una es respecto a la sensación dentro de la prueba y la otra corresponde a las prácticas discursivas del o la estudiante. Esto debe constar de tres momentos específicos: la exploración, la construcción de grafos y la redacción en lengua natural (Duval y Sáenz-Ludlow, 2016).

Por ende, la demostración debe de constar de terceros enunciados, proposiciones y conjeturas (Duval y Sáenz-Ludlow, 2016). Para la comprensión del texto académico en el gráfico, se debe explicar estos tres elementos, además de introducir definiciones que le acompañen. La carga semántica del grafo representa un medio para su comprensión, si él o la estudiante no visualizan las diversas figuras no podrán entender su desarrollo combinado con los conceptos físicos (Duval, 2017). Además, la relación entre contenido escrito y figura no representa únicamente un relleno, sino que se emplea para la modelación del problema (Perales y Jiménez, 2002) dando hincapié a la importancia de la figura y su análisis.

Desde la conceptualización de la demostración se integra el concepto de "intra-mathematical explanations" (Hanna y Barbeau, 2014), que corresponde a las explicaciones que dan cuenta dentro de la misma matemática. Esto incluye: conceptos, secuencia de la demostración y claridad. Ya que, desde esta teoría, existe demostración que "demuestra" y demostración que "demuestra y explica". Se pueden mencionar tres referentes: Mark Steiner (característica en común), Philip Kitcher (unificación), Marc Lange (simetría y unicidad), que dan cuenta de diversos métodos para caracterizar las *intra-mathematical explanations* (Hanna y Barbeau, 2014).

El contenido de razonamiento es para dar un hincapié de cómo esta interdisciplinariedad puede llegar a concebir una experiencia más vívida y estimulante:

> Al mismo tiempo la Astronomía, que resulta ser motivante por sus objetos de estudio, puede dar significado al estudio de la Física, que se enseña a menudo completamente fuera de la realidad y por lo tanto resulta incomprensible para muchos estudiantes y desalentador para acercarlos al conocimiento científico. (Giordano, 2021, p. 276)

La atención es el pilar más importante en el proceso de aprendizaje porque supone un prerrequisito para que ocurran los procesos de consolidación, mantenimiento y recuperación de la información (Bernabéu Brotóns, 2017, p. 17). Por ende, tenemos la necesidad de integrar la astronomía, la cual es motivante y podrá dar nuevas experiencias en el aula de clase, fortaleciendo la atención. La experiencia toma parte importante al ser un movilizador de emociones y sensaciones, en el cual la razón y la emoción van de la mano (Ostrosky y Vélez, 2013). Por ende, no únicamente pensaremos en el individuo como un ser que aprende, sino como un individuo con historia y emociones.

Cabe recalcar que "el aprendizaje se caracteriza por ser un proceso cognitivo y motivacional a la vez, así que, lo que motiva a un individuo no necesariamente es interesante para otro" (Ramírez-Ramírez y Olmos-Castillo, 2020, p. 51). Sin embargo, lo que caracteriza a la astronomía es que se considera una ciencia interdisciplinar que se respalda en la matemática, física, química, biología, etc., representando un campo muy amplio desde diferentes perspectivas (Lederman y Teresi, 1996). Por ende, resulta muy llamativo poder hacer una construcción geométrica con una demostración en el aula para el desarrollo adecuado de la formación de cada estudiante, en un modelo discursivo que permita tener en consideración varios aspectos, como la emoción, la interculturalidad y la observación de su entorno.

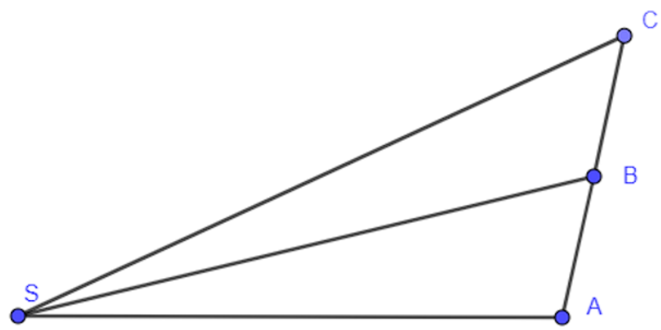
Geometría en la astronomía

En la Academia de Platón se colocaba una inscripción que prohibía la entrada a aquellos que no tuvieran conocimientos de geometría, y expresaba la frase "Quem não é geômetra não entre!" (Cornelli y Coelho, 2007, p. 420). Esto se vincula con que se ha mencionado la relación entre la geometría y la astronomía desde un punto de vista argumentativo y epistemológico. Ahora, se planteará esta conexión desde una perspectiva teórica y se presentará una demostración y un modelamiento.

En la conferencia perdida de Feynman (Goodstein *et al.*, 1999), el científico se propuso demostrar la primera ley de Kepler utilizando únicamente geometría euclidiana. No obstante, con el objetivo de mantener la concisión del argumento, el texto únicamente se enfocará en mostrar por qué un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

Como *hipótesis (H)* tendremos que recorrer la misma distancia en el mismo tiempo, y la *tesis (T)* es que el área entre esos espacios es la misma, esto se hará por demostración directa H→T. En la Figura 4 se nombra al punto S en representación del Sol; además del punto A como punto de partida del movimiento de la Tierra; la distancia de A a B y B a C serán iguales, ya que barren en tiempos iguales la misma distancia *(H)*. En este caso, en la construcción no hay ninguna fuerza externa, formando los triángulos SBA y SBC; sin embargo, la tierra no se mueve de forma recta (ir del punto A al C), ya que todos los planetas orbitan alrededor del Sol, por ende, habrá una fuerza que se dibujará como un vector la cual cambiará la dirección. Cabe recalcar que los planetas son del sistema solar y fuera del sistema solar se llaman exoplanetas o planetas extrasolares (Solís, 2018).

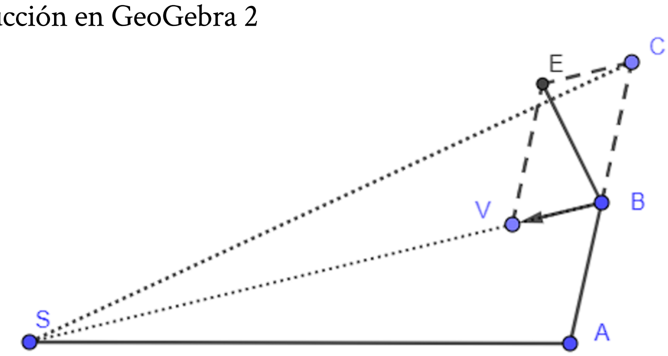
Figura 4. Construcción en GeoGebra 1



Nota. Construido en GeoGebra desde las gráficas del libro de la conferencia perdida de Feynman (Goodstein *et al.*, 1999). Elaborado en marzo de 2023.

En la Figura 5 se muestra el vector de fuerza por la atracción del Sol de B a V. El movimiento está contenido en un paralelogramo (figura geométrica de cuatro lados o cuadrilátero, en la cual los lados opuestos son paralelos y de igual longitud, ángulos adyacentes suplementarios y opuestos iguales), su diagonal es el movimiento "real". Se puede formar otro triángulo del punto E (movimiento por la fuerza de atracción) al S (Sol).

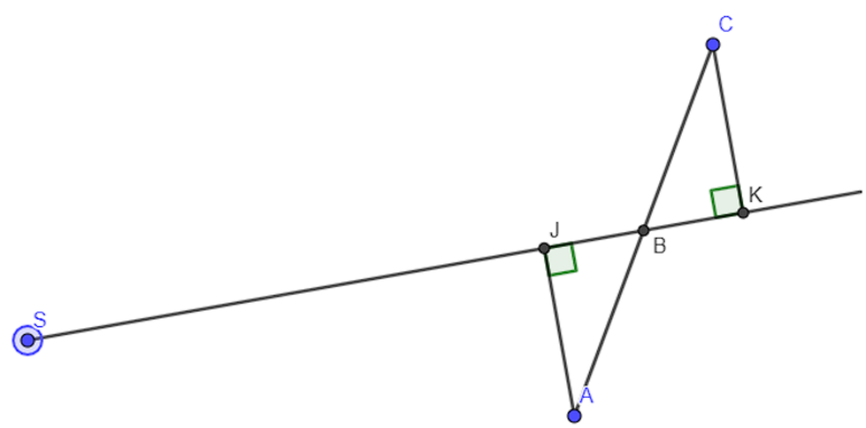
Figura 5. Construcción en GeoGebra 2



Nota. Construido en GeoGebra desde las gráficas del libro de la conferencia perdida de Feynman (Goodstein *et al.*, 1999). Elaborado en marzo de 2023.

Primeramente demostraremos que el triángulo SBA tiene la misma área del triángulo SBC. Tomando SB como base (lado en común), se formarán dos triángulos AJB y BKC como se muestra en la Figura 6 (distancias de A y C al segmento SK). Los ángulos AJB y BKC son rectos por ser distancias al segmento (Ángulo 1) y el ángulo JBA y CBK son opuestos por el vértice (Ángulo 2). Como se observan dos ángulos iguales (Ángulo 1 y Ángulo 2) y la suma interna de los ángulos de un triángulo en geometría euclidiana siempre es 180°, el tercer ángulo faltante será el mismo, siendo dos triángulos semejantes (Ángulo 3) correspondientes al ángulo JAB y BCK; y por hipótesis inicial *(H)* AB y BC son congruentes (Lado), por ende, los triángulos son congruentes por ALA (Ángulo 2, Lado, Ángulo 3). Esto indica que los dos triángulos AJB y BKC son congruentes, por lo tanto, los lados AJ y CK son iguales, siendo respectivamente las alturas y correspondiendo a los triángulos SAB y SBC, los cuales poseen la misma base y la misma altura (por lo antes mencionado). Por lo tanto, ambos triángulos tendrán la misma área (*proposición 1*), ya que el área de los triángulos es base por altura dividido dos.

Figura 6. Construcción en GeoGebra 3



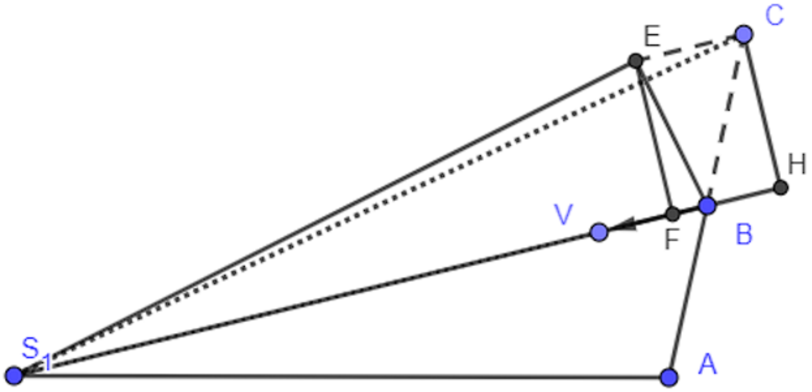
Nota. Construido en GeoGebra desde las gráficas del libro de la conferencia perdida de Feynman (Goodstein *et al.*, 1999). Elaborado en marzo de 2023.

En la **Figura** 7 se realiza la construcción de los dos triángulos SBE y SBC, con EF Y CH como distancias, por ende, tendrán ángulos rectos, los puntos E y C están contenidos en un lado del paralelogramo y F y H en su lado opuesto, entonces estas distancias están contenidas en paralelas, por ende serán congruentes (EF y CH alturas iguales). La base en común será SB, por lo tanto, estos triángulos tendrán la misma área (*proposición 2*), ya que su base y su altura son iguales (SB base, EF y CH alturas).

Ya que el triángulo SBA y SBC tienen la misma área (*proposición 1*); SBC y SBE también tienen la misma área (*proposición 2*) por transitividad el triángulo SBA tiene la misma área que el triángulo SBE, Q.E.D. Si se quiere ampliar la demostración revisar "La conferencia perdida de Feynman. El movimiento de los planetas alrededor del sol" (Goodstein *et al.*, 1999).

• doi: https://doi.org/10.25100/praxis_educacion.v0i12.13348

Figura 7. Construcción en GeoGebra 4



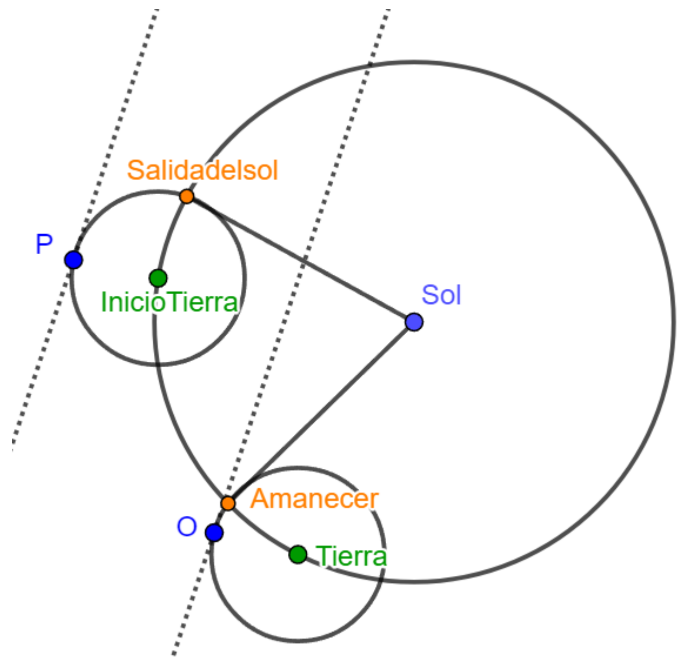
Nota. Construido en GeoGebra desde las gráficas del libro de la conferencia perdida de Feynman (Goodstein *et al.*, 1999). Elaborado en marzo de 2023.

Ahora, desde el libro "Astronomía a Simple Vista" se plantea la "Diferencia entre los días solares y los sidéreos" . Con la **Figura 8** modelada en GeoGebra modificada del mismo libro (Aller, 1998, p. 13), por el objetivo que el artículo desea llegar, se enfocará primordialmente en la rotación y traslación de la tierra, que corresponde a dos isometrías. Esto no será una demostración, sino un modelamiento de un fenómeno físico que llenará de significación una figura geométrica.

En la **Figura 8** podemos observar el punto denominado "Sol", y los puntos "InicioTierra" y "Tierra" como representación de la bóveda celeste. Los puntos "Salidadelsol" y "Amanecer" son posiciones de observación en un determinado lugar del planeta, las tangentes (P y O) son guiadas hacia una estrella en particular. Primeramente, debemos visualizar y modelar cómo la Tierra se traslada del "InicioTierra" a la posición "Tierra". Luego, considerar cómo los ángulos cambian. A primera vista se nota que el punto P a la "Salidadelsol" está más distante, en comparación con O y el "Amanecer". En otras palabras, el primer caso tiene un arco mayor que el segundo (distancia más larga).

Se presenta ahora una diferencia entre cuando el Sol está apareciendo en el horizonte (en los puntos "Salidadelsol" y "Amanecer"): "si hubiéramos observado por la mañana, los resultados serían los mismos, sólo que entonces el nacimiento de la estrella procedería al Sol" (Aller, 1998, p. 14). Por ende, en el aula se presenta la pregunta de cómo podríamos explicar este fenómeno, contextualizando el contenido respectivo que se está enseñando; una explicación para ello será que la Tierra rota en su propio eje, moviéndose a lo largo de su órbita, dando una idea intuitiva de los conceptos de rotación y traslación.

Figura 8. Traslación y Rotación de la Tierra



Nota. Modelo construido en GeoGebra, inspirado en el libro "Astronomía a simple vista" (Aller, 1998). Elaborado en marzo de 2023.

Esto igualmente abre muchas posibilidades, como por ejemplo, tratar los conceptos de perihelio y afelio —el punto más cercano y más alejado en la órbita terrestre al sol respectivamente—, integrando el tema de traslación, o los solsticios y equinoccios —los solsticios son los momentos en que el Sol alcanza su máxima ó mínima declinación en relación con el ecuador celeste, lo cual resulta en los días más largos y más cortos del año, y los equinoccios son en el momento que el Sol está directamente sobre el ecuador, lo que hace que la duración del día y la noche sea casi igual en todas partes de la Tierra, explicado con la rotación. Esto permitirá que los y las estudiantes puedan tener una visión más amplia de la utilidad de la geometría para entender el mundo y sus fenómenos físicos.

Conclusiones

Las herramientas propuestas permiten la creación de un modelo discursivo en el cual el estudiante pueda expresar de forma matemática algunos fenómenos físicos aplicados a la astronomía, sin limitarse exclusivamente al campo de la física (aunque es su principal aporte), sino que permite hablar de otras ciencias, como por ejemplo el agua y su composición en Marte (Martínez-Frías, 2016). Evitando algunas problemáticas como que el libro de texto ha silenciado la voz de los profesores (Bishop, 2005). La integración de la astronomía en la enseñanza de la geometría resulta enriquecedora en términos de atención, interculturalidad e interdisciplinariedad entre estos dos campos del conocimiento. Los y las estudiantes se enfrentarán a una actividad experimental que implica matemáticas aplicadas y estará sujeto a un modelo discursivo que integre conceptos de las ciencias y de la matemática. Entonces, la pregunta que a menudo surge en el aula de clases, "¿para qué sirve?", se responde implícitamente al poder gestionar todos estos conocimientos.

Esta interdisciplinariedad permite o facilita la enseñanza de las matemáticas, en particular de la geometría, por el reconocimiento del contexto, la interpretación física y ejemplificaciones observables, lo que posibilita explicar conceptos geométricos que usualmente conciben difíciles o de una complejidad mayor en su enseñanza (como por ejemplo la demostración anterior). No solo se considera que esta interdisciplinariedad cuestionará la geometría euclidiana tradicional, sino que también estamos dando un paso hacia la modelación de fenómenos y construcciones geométricas desde una perspectiva diferente. Se ha avanzado lo suficiente como para proponer nuevos enfoques en lo que los y las estudiantes deben aprender. Es importante destacar que la enseñanza de la geometría euclidiana sigue siendo esencial, pero negar la necesidad de avanzar hacia modelos que impulsen a generar nuevos conceptos y pensamientos podría ser objeto de debate.

Por ende, salir de la rutina se considera un riesgo que, si los docentes no asumen la responsabilidad de romper lo tradicional, simplemente se estará en un círculo vicioso de un mismo tipo de enseñanza; no se está formando científicos, ni mucho menos matemáticos, pero al entender que la astronomía resulta ser una ciencia que afecta la forma de concebir ciertas situaciones, impulsa los argumentos que pueden llegar a construir los y las estudiantes desde una perspectiva crítica y respetando la interculturalidad.

La clase de matemática no solo será un lugar para aprender funciones, conjuntos, ángulos, medidas, etc., al contrario, aprenderán de todo eso y mucho más, aplicando un contexto social y un modelo discursivo en el cual se ha concebido la disciplina, entendiendo que tiene una historia y no es lejana ni trivial, sino que es vivencial en la comunidad (desde diversas perspectivas); desmitificando las “concepciones sociales” de la matemática como algo difícil de entender para muchos individuos. Esta interdisciplinariedad, por ende, resulta enriquecedora en tanto se pueda acercar al contexto de los y las estudiantes, usando un modelo discursivo que les permita utilizar conceptos de las disciplinas para describir y argumentar ciertos fenómenos, los cuales mejorarán la atención y cerrarán brechas que se han formado en la clase de matemáticas.

Referencias bibliográficas

Aguilera C., A., y Bolívar S., A. (2022). Enseñanza de las matemáticas apoyada en la práctica de la astronomía, una revisión teórica. *Prospectiva científica*, 15–32.

Aller U., R. M. (1998). OP/163-Astronomía a simple vista. Universidade de Santiago de Compostela.

Austin M., T. R. (2000). Para comprender el concepto de cultura. *UNAP Educación y desarrollo*, 1(1), 1–11.

Bernabe V., M. d. M. (2012). Pluriculturalidad, multiculturalidad e interculturalidad, conocimientos necesarios para la labor docente. *Hekademos: revista educativa digital*, (11), 67–76.

Bernabéu B., E. (2017). La atención y la memoria como claves del proceso de aprendizaje. Aplicaciones para el entorno escolar. *ReiDoCrea, 6*(2), 16–23.

Bishop, A. (2005). *Aproximación sociocultural a la educación matemática. La construcción social del significado: ¿un desarrollo significativo para la educación matemática* (Trad. H. Alonso). Universidad del Valle.

Bocanegra M., C. A., y Cabrera R., J. (2023). *Manufactura de un espejo parabólico de diámetro de apertura 140mm y relación focal f/9 para observación planetaria* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo]. https://repositorio.unprg.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12893/13406/Bocanegra_Mongrut_Cristian_Alejandro%20y%20Cabrera_Romero_Joel.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Candela, A. (1993). *La construcción discursiva de la ciencia en el aula. Investigación en la Escuela, 21*(1), 31–38. https://doi.org/10.12795/IE.1993.i21.03

Cornelli, G., y Coelho, M. C. de M. N. (2007). "Quem não é geômetra não entre!" Geometria, Filosofia e Platonismo. *Kriterion. Revista de Filosofia, 48*(116), 417–435. https://doi.org/10.1590/S0100-512X2007000200009

Cortés P., I. I (2015). *Leyes de Kepler*. Universidad Nacional Autónoma de México. https://www.academia.edu/12984768/Leyes_de_Kepler

Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (2ª ed.). Programa Editorial Universidad del Valle.

Duval, R., y Sáenz-Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas.* Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Esteban, C. (2013). Arqueoastronomía y religión ibérica. En C. Risquez y C. Rueda, *Santuarios iberos: territorio, ritualidad y memoria. Actas del congreso "El Santuario de la Cueva de La Lobera de Castellar, 1912-2012*" (pp. 465–484). Asociación para el Desarrollo Rural de la Comarca de El Condado.

Feynman, R. (2001). ¿Qué es la ciencia? Polis, *Revista de la Universidad Bolivariana, 1*(1).

Freire, P. (2014). *Pedagogía de la esperanza: un reencuentro con la pedagogía del oprimido.* Siglo XXI Editores México.

Giordano, C. C., Pereira, F. A., y dos Santos S., F. (2022). La importancia de la estadística cívica en la lucha contra las fake news: una experiencia docente en la educación básica brasileña. *ICOTS11.* https://iase-web.org/icots/11/proceedings/pdfs/ICOTS11_102_GIORDANO.pdf?1669865512

Giordano, E. (2021). Una progresión de aprendizaje sobre ideas básicas entre Física y Astronomía. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias, 16*(2), 272–293. https://doi.org/10.14483/23464712.17107

Gómez F., J. (2012). Cultura: sus significados y diferentes modelos de cultura científica y técnica. *Revista Iberoamericana de Educación, 58,* 15–33. https://doi.org/10.35362/rie580471

Goodstein, D. L., Goodstein, J. R., y Feynman, R. P. (1999). *La Conferencia perdida de Feynman: el movimiento de los planetas alrededor del Sol* (1ª ed.). Tusquets Editores.

Hanna, G., y Barbeau, E. (2014). Proofs as bearers of mathematical knowledge. En G. Hanna, H. N. Jahnke y H. Pulte (Eds.), *Explanation and proof in mathematics. Philosophical and educational perspectives* (pp. 85–100). Springer.

Kepler, J. (1992). *El secreto del universo* (Trad. E. Rada García). Alianza.

Lanciano, N. (1989). Ver y hablar como Tolomeo y pensar como Copérnico. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas, 7*(2), 173–182.

Lanciano, N., y Berardo, M. (2016). Eratóstenes: um exemplo de trabalho com estudiantes universitários em didática e história da astronomia. *Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia*, 22, 7–19.

Lederman, L., y Teresi, D. (1996). *La partícula divina.* Grijalbo.

Lehmann-Nitsche, R. (1923). Mitología sudamericana: V. La astronomía de los matacos. *Revista del Museo de La Plata, 27,* 253–266.

Lemke, J. L. (2006). Investigar para el futuro de la educación científica: nuevas formas de aprender, nuevas formas de vivir. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas, 24*(1), 5–12. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3810

Martínez-Frías, J. (2016). Marte: nuevas evidencias sobre agua líquida reciente y habitabilidad. *Enseñanza de las Ciencias de la Tierra, 24*(2), 250–252. https://raco.cat/index.php/ECT/article/view/312563

Núñez, R., y Sánchez Ron, J. M. (2010). *Galileo, observador e intérprete de los cielos.* Prefacio de Noticiero sideral (Sidereus nuncius). Museo Nacional de Ciencia y Tecnología.

Ostrosky, F., y Vélez, A. (2013). Neurobiología de las emociones. *Revista Neuropsicología, Neuropsiquiatría y Neurociencias, 13*(1), 1–13.

Perales, F. J., y Jiménez, J. de D. (2002). Las ilustraciones en la enseñanza-aprendizaje de las ciencias. Análisis de libros de texto. *Enseñanza de las ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas, 20*(3), 369–386. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3954

Peralta, J., y Reyes, P. (2014). La persistencia de los deferentes y los epiciclos a lo largo de la historia de la astronomía. *Lat. Am. J. Phys. Educ, 8*(3), 521–525. http://lajpe.org/sep14/16_LAJPE_925_Jose_Peralta.pdf

Petakos, K., y Sgreccia, N. (2010). El quinto postulado de Euclides: Propuesta de clase para el último año de la escuela secundaria. *Revista de Educación Matemática (RevEM), 25*(2), 3.

Ramírez-Ramírez., M. d. R., y Olmos-Castillo, H. I. (2020). Funciones cognitivas y motivación en el aprendizaje de las matemáticas. *Naturaleza y tecnología*, (2), 51–63.

Salinas, A. (2002). Eratóstenes y el Tamaño de la Tierra (S. III aC). *Revista de Geografía Norte Grande*, (29), 143–148.

Schon, I. (2006). Todo lo que hay que saber sobre el espacio (Dont Know Much About Space). *Science and Children*, 43(6), 36.

Solís G., J. (2018). Planetas Extrasolares. *Anuario del Real Observatorio de Madrid*, (1), 391–407.

Tamayo, O. E., Cadavid A., V., y Dávila M., V. (2018). *Multimodalidad: múltiples lenguajes empleados en la enseñanza de la ciencia.* Universidad de Caldas.

Toledo C., Z. P., y Cruz R., G. A. (2018). Una propuesta para la enseñanza de los números decimales en un contexto agrícola. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática. Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática, 11*(1), 116–138.

Vasco, C. E. (1992). Geometría activa y geometría de las transformaciones. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (2). https://doi.org/10.17227/ted.num2-5706

Viveros V., W. S. (2019). Las teorías no euclidianas y la filosofía de la ciencia como propuesta académica para comprender el funcionamiento del universo. *Revista Boletín Redipe, 8*(11), 50–57.

Walsh, C. (2005). Interculturalidad, conocimientos y decolonialidad. *Signo y pensamiento, 24*(46), 39–50.

Notas

[1] Estudiante de Licenciatura en matemáticas y Licenciatura en física, Universidad del Valle, Cali, Colombia. Correo electrónico: juan.sebastian.luna@correounivalle.edu.co ORCID: 0009-0003-8954-250X

[2] El día solar es el tiempo que tarda la Tierra en completar una rotación completa sobre su eje en relación con el Sol y el día sidéreo es el tiempo que tarda la Tierra en completar una rotación completa sobre su eje en relación con las estrellas fijas.