REDUCIENDO LA BRECHA MEDIACIONAL CON LA GEOMETRÍA DINÁMICA: DINAMISMO, DEPENDENCIA Y TEMPORALIDAD

Bridging the mediational gap with dynamic geometry: dynamism, dependence and temporality

•••

Reduzindo a lacuna mediacional com a Geometria dinâmica: dinamismo, dependência e temporalidade

Por:

Sergio Rubio-Pizzorno[1]
Estudiante del Doctorado en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Ciudad de México, México.
sergio.rubio@cinvestav.mx
iD: 0000-0003-3624-1829

Gisela Montiel-Espinosa[2]
Investigadora titular del Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Ciudad de México, México.
gmontiele@cinvestav.mx
: 0000-0003-1670-9172

Luis Moreno-Armella[3]
Investigador titular del Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Ciudad de México, México.
lmorenoarmella@gmail.com
: 0000-0001-5055-5782

Recepción: 15/11/2023 • **Aprobación:** 28/11/2023

Resumen: La aparición de los Ambientes de Geometría Dinámica –como GeoGebra– ha provocado cambios tanto en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, como en la investigación en Educación de la Geometría. El objetivo de este artículo es interpretar tales cambios como una reducción de la brecha mediacional. Para desarrollar este objetivo, se presentan dos aspectos importantes; por una parte, la evolución histórica de las representaciones geométricas –desde las representaciones estáticas hasta las dinámicas–, las tecnologías que las generan y el nivel de interacción que permiten. Y por otra parte, la caracterización del rol mediacional de los Ambientes de Geometría Dinámica, mediante la descripción de sus dimensiones, a saber, el dinamismo, la dependencia y la temporalidad. En conjunto, ambos aspectos permiten reconocer que la reducción de la brecha mediacional producida por los Ambientes de Geometría Dinámica se refiere a la posibilidad de acceder y de interactuar con la estructura de los objetos geométricos; esto gracias a las propiedades geométricas añadidas a las representaciones dinámicas, la posibilidad de develar la relación jerárquica entre los objetos constituyentes de una representación dinámica, y conjeturar o hacer visible la secuencia de construcción de una representación dinámica.

Palabras clave: Mediación; Ambientes de Geometría Dinámica (AGD); Representación; Arrastre; GeoGebra.

Abstract: The emergence of Dynamic Geometry Environments -such as GeoGebra- has brought about changes in both the teaching and learning of geometry, as well as in Geometry Education research. The aim of this article is to interpret such changes as a reduction of the mediational gap.To develop this objective, two important aspects are presented. On the one hand, the historical evolution of geometric representations -from static to dynamic representations-, the technologies that generate them and the level of interaction they allow. And on the other hand, the characterization of the mediational role of Dynamic Geometry Environments, through the description of their dimensions, namely, dynamism, dependence and temporality. Together, both aspects allow us to recognize that the reduction of the mediational gap produced by Dynamic Geometry Environments refers to the possibility of accessing and interacting with the structure of geometric objects. This thanks to the geometric properties added to the dynamic representations, the possibility of unveiling the hierarchical relationship between the constituent objects of a dynamic representation, and conjecturing or making visible the sequence of construction of a dynamic representation.

Keywords: Mediation; Dynamic Geometry Environments (DGE); Representation; Dragging; GeoGebra.

Resumo: O surgimento de Ambientes de Geometria Dinâmica - como o GeoGebra - trouxe mudanças tanto no ensino e aprendizagem da geometria, como nas pesquisas em Educação em Geometria. O objetivo deste artigo é interpretar tais mudanças como uma redução da lacuna mediacional. Para desenvolver esse objetivo, dois aspectos importantes são apresentados; por um lado, a evolução histórica das representações geométricas – das representações estáticas às dinâmicas –, as tecnologias que as geram e o nível de interação que permitem; por outro lado, a caracterização do papel mediador dos Ambientes de Geometria Dinâmica, através da descrição das suas dimensões, nomeadamente, dinamismo, dependência e temporalidade. Juntos, ambos os aspectos permitem reconhecer que a redução da lacuna mediacional produzida pelos Ambientes de Geometria Dinâmica se refere à possibilidade de acessar e interagir com a estrutura dos objetos geométricos. Isto se dá graças às propriedades geométricas agregadas às representações dinâmicas, à possibilidade de desvendar a relação hierárquica entre os objetos constituintes de uma representação dinâmica, e de conjecturar ou tornar visível a sequência de construção de uma representação dinâmica.

Palavras-chave: Mediação; Ambientes de Geometria Dinâmica; Representação; Arrastar; GeoGebra.

¿Cómo citar este artículo? / How to quote this article?
Rubio-Pizzorno, S., Montiel-Espinosa, G., y Moreno-Armella, L. (2021). Reduciendo la brecha mediacional con la geometría dinámica: dinamismo, dependencia y temporalidad. *Praxis, Educación y Pedagogía* (8), e4023375.
https://doi.org/10.25100/praxis_educacion.v0i8.13375

Introducción

Desde hace algunas décadas la Educación Matemática en general, y la Educación de la Geometría en particular, se han revitalizado gracias a la aparición de los Ambientes de Geometría Dinámica (AGD), lo cual ha implicado un cambio importante en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría escolar:

> Las aplicaciones de la geometría varían amplia y crecientemente, dado los desarrollos de visualización y modelación basados en computadores. La aparición de imágenes digitales y dinámicas no solo ha revivido a la disciplina de las matemáticas, también ha cambiado radicalmente la manera en que está siendo enseñada y aprendida en la escuela en estos días (Sinclair *et al.,* 2017, p. 457).

Al respecto, Leung *et al.*, (2023) mencionan que al trabajar con AGD, las y los estudiantes comienzan a diferenciar entre el objeto geométrico (ideal) y su representación (material), en comparación con el trabajo con lápiz y papel. Esto se debe a la diferencia en la producción de las representaciones con cada tecnología: en un ambiente estático como el lápiz y papel, los estudiantes pueden dibujar un cuadrado a mano alzada sin la necesidad de ser conscientes de sus propiedades, y posteriormente añadir símbolos para indicarlas (Healy, 2000) o, dicho de otro modo, "el dibujo puede ser producido sin una referencia explícita a sus propiedades" (Leung *et al.*, 2023, p. 14).

En cambio, en los AGD las representaciones o "construcciones geométricas deben estar expresadas en términos de construcciones secuenciales" (Sinclair *et al.*, 2017, p. 702), debido a que son ambientes constructivo-funcionales. Esto implica que la representación geométrica dinámica "mantiene todas las propiedades de acuerdo a las cuales fue construida y todas las consecuencias que conlleva la construcción de la Geometría Euclidiana" (Leung, 2015, p. 467).

Por ejemplo, se puede considerar la expresión , donde es un punto y es una recta. Para representar esta expresión en un ambiente estático (como el lápiz y papel o una pizarra digital), se puede dibujar la recta, luego dibujar el punto sobre ella y, finalmente, añadir símbolos que indiquen alguna propiedad geométrica, como las flechas en el extremo de la recta que añaden el significado de infinitud, o el nombre de los objetos, tal como se muestra en la Figura 1.

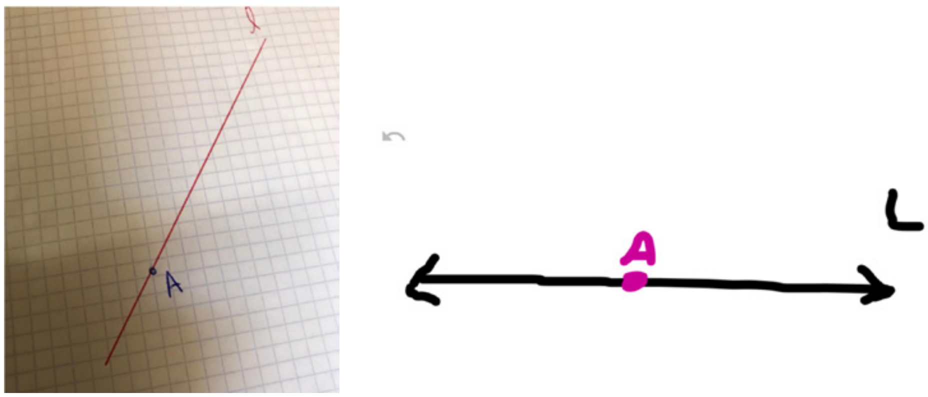

Figura 1. Dibujo a mano alzada de una recta y un punto en ambiente estático: lápiz y papel (izquierda) y pizarra digital (derecha).

A diferencia del ambiente estático, para representar la expresión en un AGD se necesitan obligatoriamente dos puntos para trazar la recta, ya que, siguiendo la axiomática de la geometría: "dos puntos distintos A y B siempre determinan completamente una única recta" (Hilbert, 1950, p. 2), tal como se muestra en la Figura 2.

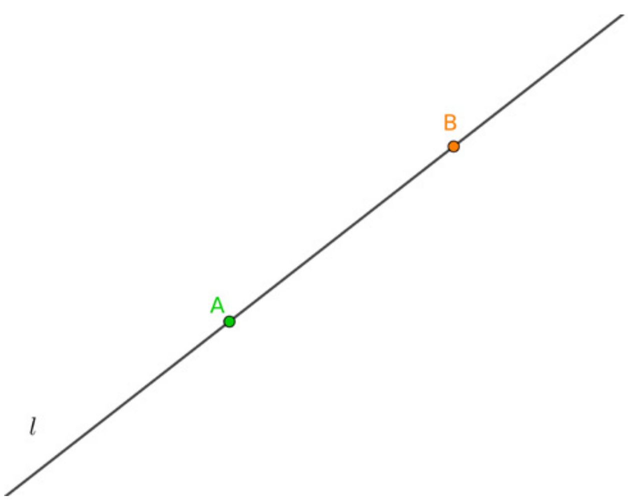

Figura 2. Construcción de una recta y dos puntos en AGD.

En este sentido, en un AGD es imposible representar la expresión como en un ambiente estático (ver Figura 1), ya que no se estarían cumpliendo con las consecuencias, las propiedades y, en general, con la axiomática de la geometría. Por lo anterior, en los AGD las representaciones no se dibujan sino que se construyen, en el sentido euclidiano del término. Además de los cambios en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, la aparición de los AGD también ha provocado cambios en la investigación, donde se da cuenta de una ampliación y profundización en el estudio de la geometría. Por ejemplo:

- Pasar de considerar únicamente definiciones excluyentes y clasificaciones particionales a considerar también definiciones incluyentes y clasificaciones jerárquicas, al trabajar en tareas sobre clasificación de cuadriláteros (Erez y Yerushalmy, 2006).
- Pasar del estudio de propiedades de objetos geométricos por contemplación de diagramas estáticos a la exploración de sus propiedades a través de las transformaciones en la clasificación de cuadriláteros (Sinclair y Yurita, 2008).
- Pasar de trabajar sólo en la etapa intrafigural en el estudio de la geometría, para ampliarla a las etapas interfigural (Healy, 2003) y transfigural (Yanik, 2013), al trabajar con transformaciones geométricas.
- Superar el obstáculo de asociar mayor amplitud al ángulo con el lado de mayor longitud (Kaur, 2015).
- Superar la dificultad para caracterizar formalmente los poliedros a la conjeturación de sus propiedades (Sinclair *et al.*, 2017).

Luego de mostrar algunos cambios en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, y en la investigación en Educación de la Geometría debido a la aparición de los AGD, en el presente artículo se pretende mostrar cómo estos también se pueden interpretar como una reducción de la brecha mediacional, es decir, que la distancia mediática entre las personas y la geometría se ha acortado gracias a los AGD. Para desarrollar esta tesis presentamos, en primer lugar, a qué nos referimos con la brecha mediacional y, en segundo lugar, el rol mediacional de los AGD mediante la descripción de sus dimensiones: dinamismo, dependencia y temporalidad. Esto permitirá mostrar cómo los AGD ayudan a la reducción de la citada brecha.

Antes de cerrar esta introducción es importante mencionar que en el presente artículo se utiliza el AGD de GeoGebra, el cual corresponde a un software libre, por lo que es de uso y distribución gratuito (Rubio-Pizzorno, 2020), además de ser una herramienta amigable en comparación con otros programas de geometría dinámica que son pagos, por lo que los resultados presentados en este artículo sobre AGD usando GeoGebra son completamente transferibles a otros AGD, siempre y cuando sean de tipo constructivo-funcional.

Brecha mediacional en matemáticas

El término brecha se refiere a la "diferencia o distancia entre situaciones, cosas o grupos de personas, especialmente por la falta de unión o cohesión" (Real Academia Española , 2022). En el caso de la brecha mediacional en matemáticas nos referimos a la distancia que hay entre las personas y las matemáticas, la cual corresponde a una brecha insalvable que nunca podrá ser eliminada debido a la naturaleza epistemológica de las matemáticas, referida a la inmaterialidad de sus objetos. Esto implica que "cualquier relación inmediata con las matemáticas es imposible; cualquier relación pasa por un proceso de mediación" (Drijvers *et al.*, 2009, p. 114).

Mediación en Educación Matemática: tecnología, representación e interacción

El proceso de mediación se refiere a la materialización de entidades matemáticas ideales (números o figuras) en entidades concretas generalmente denominadas como representación (Drijvers *et al.,* 2009). Por lo tanto, la manera en que las personas podemos acceder a un objeto matemático inmaterial es usando un representante material de tal objeto. De esta manera, las personas interactuamos directamente con ese representante material, el cual nos permite acceder a una característica del objeto matemático (no a todas), razón por la cual en general se usan varios representantes del objeto matemático para estudiarlo (grafico, tabular, algebraico, etc.). De ahí que este representante material del objeto matemático ideal se denomine *representación.*

Las representaciones matemáticas, gracias a la evolución de sus características, han sido fundamentales para el desarrollo de la matemática en sí. Tales características son heredadas de las tecnologías que producen dichas representaciones, puesto que estas y las matemáticas se han influenciado mutuamente en su desarrollo a lo largo de la historia (Moreno-Armella y Sriraman, 2005).

Esta evolución ha ido acortando progresivamente la brecha mediacional en matemáticas gracias a que "la naturaleza de los símbolos [o representaciones] matemáticas ha evolucionado en los últimos años desde inscripciones estáticas e inertes a objetos o diagramas dinámicos, construibles, manipulables e interactivos" (Moreno-Armella *et al.*, 2008, p. 103).

Evolución de las representaciones matemáticas

Si se piensa en las primeras representaciones matemáticas de las cuales se tienen registro, es posible darse cuenta de que son representaciones con las cuales había poca interacción, ya que se hacía el registro y no se podía modificar, sino sólo contemplar. Por ejemplo, el hueso de Ishango (ver Figura 3) corresponde a la primera herramienta matemática (que muestra razonamiento lógico) de la que se tiene registro, donde sus marcas pueden corresponder a cuentas, registro de fechas o un sistema numérico (Freiman, 2020; Pletser y Huylebrouck, 1999). Las marcas hechas en el hueso corresponden a representaciones matemáticas que, debido a las características de la tecnología usada (hueso y algo para hacer las marcas) son permanentes (han permanecido ahí entre 20.000 a 90.000 años). Por este motivo, la interacción con tales representaciones únicamente se remonta a hacer las marcas en el hueso, lo que en palabras de Moreno-Armella *et al.* (2008) hace que este tipo de representación matemática sea de tipo *estática inerte*.

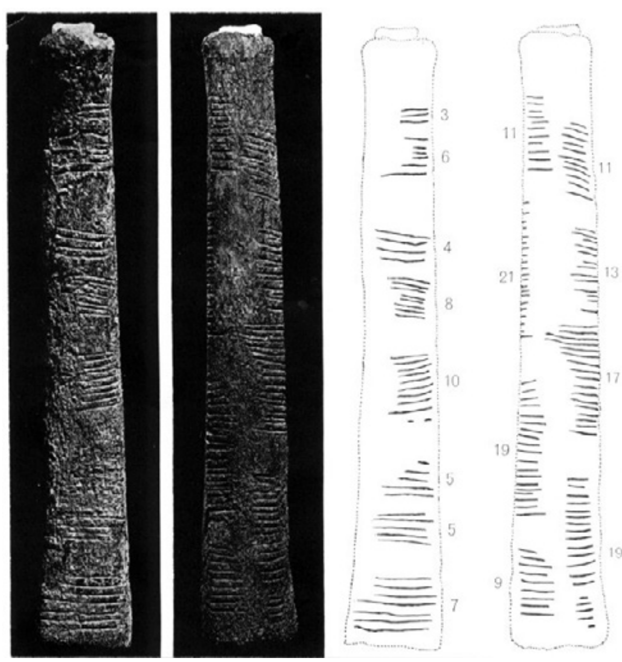

Figura 3. Hueso de Ishango y su detalle matemático (Pletser y Huylebrouck, 1999).

Desde hace algunos siglos, el lápiz y papel han tomado el papel protagónico como la tecnología a usar en la producción de representaciones matemáticas. Este tipo de tecnología permite una mayor interacción con las representaciones matemáticas en comparación con las representaciones estáticas inertes, debido a la posibilidad de escribir o realizar trazos de manera más fácil; usar diferentes colores para distinguir las anotaciones (ver Figura 1); y la posibilidad de borrar lo anotado o dibujado. Estas características las convierten en representaciones *estáticas cinestésicas/estéticas* (Moreno-Armella *et al.*, 2008) y dan cuenta de una reducción en la brecha mediacional respecto de las representaciones estáticas inertes.

Finalmente se tiene a las representaciones dinámicas elaboradas con los AGD, las cuales –como ya se ha indicado en este artículo– han revitalizado la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, y la investigación en Educación de la Geometría. En comparación con las representaciones estáticas, que en su elaboración no se ciñen necesariamente a cuestiones matemáticas (ver Figura 1), las representaciones dinámicas de GeoGebra "están elaboradas respetando las reglas matemáticas: son figuras estructurales no meramente dibujos, como los que uno produce sobre el papel" (Moreno-Armella, 2018, p. 34), lo cual hace que la representación dinámica dé cuenta de más características del objeto matemático representado.

En términos de interacción, la representación dinámica puede ser manipulada por el o la usuaria mediante el arrastre de sus elementos constituyentes; se puede usar diferentes colores, grosores y motivos para distinguir las representaciones realizadas; se puede acceder a la historia de la representación para estudiar cómo fue elaborada, entre otros. Todas estas características, por un lado la distingue de las representaciones estáticas y, por otro, la convierten en representaciones de tipo *dinámicas continuas* (Moreno-Armella *et al.*, 2008). De esta manera se muestra una reducción en la brecha mediacional respecto de las representaciones estáticas (ya sean inertes o cinestésicas/estéticas). En consecuencia, para dar cuenta de la progresiva reducción de la brecha mediacional se ha mostrado diferentes tipos de tecnología que producen representaciones estáticas y dinámicas, las cuales por sus características permiten diferentes tipos de interacción. En definitiva, lo que se ha mostrado es el *rol mediacional* de cada representación: el tipo de interacción o lo que se puede hacer con la representación, en consecuencia a sus características heredadas de la tecnología que la produjo.

De esta manera, en la siguiente sección se profundiza en el rol mediacional de las representaciones dinámicas continuas de GeoGebra (o simplemente representaciones dinámicas), para lo cual se presentan y describen, mediante ejemplos, las dimensiones de los AGD y los elementos que las componen.

Rol mediacional de los Ambientes de Geometría Dinámica

La investigación con AGD ha avanzado mucho durante las últimas décadas, permitiendo dar amplia evidencia de las diferentes potencialidades de este tipo de ambientes en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, y de su robusto rol mediacional. Entre ellos se encuentra la posibilidad de verificar y explorar propiedades geométricas (Hölzl, 2001); generar datos, identificar propiedades, evolucionar estrategias de resolución de tareas y generar nuevas preguntas (Laborde, 2005); explorar y explicar tareas geométricas (Fahlgren y Brunström, 2014); reconocer propiedades geométricas como invariantes en variación (Laborde, 2005; Leung, 2008); verificar dinámicamente si una construcción está bien hecha mediante la prueba del arrastre (Arzarello *et al.,* 2002); producir conjeturas, descubrir contraejemplos y aportar ideas sobre cómo demostrar conjeturas (Komatsu y Jones, 2020); comenzar a distinguir entre un objeto matemático ideal y su representación material (Leung *et al.*, 2023); profundizar en el dinamismo, al tener los mismos objetos pero con dos comportamientos dinámicos diferentes (Talmon y Yerushalmy, 2004); predecir el comportamiento de una representación dinámica (Miragliotta y Baccaglini-Frank, 2021); inducir invariantes para generar conjeturas por abducción (Baccaglini-Frank y Mariotti, 2010); reconocer que al arrastrar las representaciones dinámicas, estas mantienen las propiedades de acuerdo a las cuales fueron construidas y las propiedades euclidianas (Leung, 2015); entre muchos otros.

Cabe destacar que estos resultados se refieren –en general– al potencial dinámico de los AGD vinculado directamente a la "transformación continua en tiempo real" conocida como *arrastre* (Goldenberg y Cuoco, 1998, p. 351). Lo cual resulta natural si se considera que "la literatura enfatiza en el arrastre como la característica definitoria de un AGD" (Fahlgren y Brunström, 2014, p. 298) y que es el aspecto que los distingue de otros programas de geometría (Goldenberg y Cuoco, 1998). Si bien el arrastre es un elemento importante en los AGD, hay otros aspectos que permiten dar cuenta de la amplitud de su rol mediacional y que, en conjunto, son los responsables de la reducción de la citada brecha. En este sentido, para mostrar el rol mediacional de los AGD, se presentan tres dimensiones de la geometría dinámica que impactan en sus representaciones, en lo que se puede hacer con ellas y en las propiedades de los objetos geométricos que representan, a saber: el dinamismo, la dependencia y la temporalidad.

Cada una de estas dimensiones está constituida por ciertos elementos, los cuales permiten detallar el rol de cada dimensión: en el caso del dinamismo se tienen el ya mencionado arrastre y el comportamiento dinámico; para la dependencia se tienen las relaciones de dependencia y la posibilidad de borrar; y para la temporalidad se tienen la secuencia y el protocolo de construcción. Si bien algunos de estos elementos han sido tratados en la literatura académica, de igual forma han quedado a la sombra de la gran cantidad de investigaciones que tienen al arrastre como elemento principal. Por lo que, a continuación se presenta cada dimensión y sus respectivos elementos constituyentes, los cuales se desarrollan mediante ejemplos, con el objetivo de resaltarlos a todos como aspectos importantes de la geometría dinámica. Es importante mencionar que se deja abierta la posibilidad de seguir encontrando más dimensiones y elementos de la GD de los que se reportan en este artículo, a medida que se siga desarrollando más investigación con esta tecnología.

Dinamismo

Debido a las ya citadas características de los AGD, las representaciones dinámicas presentan una característica que las distingue de las representaciones estáticas: el comportamiento dinámico. Este comportamiento se refiere a los tipos de cambios de los objetos geométricos al momento de arrastrar alguno de ellos (Talmon y Yerushalmy, 2004). En este sentido, el comportamiento dinámico puede ser:

1. Sobre el objeto arrastrado, que se refiere a su *grado de libertad.*
2. Sobre los otros objetos (objetos no arrastrados), que se refiere a su respuesta al arrastrar otro objeto.

Para ilustrar esta característica se retoma el ejemplo de la Figura 2 donde se representa la expresión en GeoGebra, donde es un punto y es una recta, pero esta vez se presentan dos representaciones dinámicas de tal expresión con diferentes comportamientos dinámicos. En ambos casos se ha activado el rastro del punto , el cual muestra el camino por donde ha pasado cuando ha sido arrastrado.

En el caso 1 (Figura 4 izquierda), el punto A ha sido arrastrado de manera libre por todo el plano euclidiano. Además, al arrastrar el punto A, la recta se mueve siguiendo el movimiento del punto A y de lo que parece ser un centro de rotación[4].

En el caso 2 (Figura 4 derecha), únicamente es posible arrastrar el punto A sobre la recta. Además, al arrastrar el punto A, la recta permanece en su lugar y no manifiesta ningún cambio.

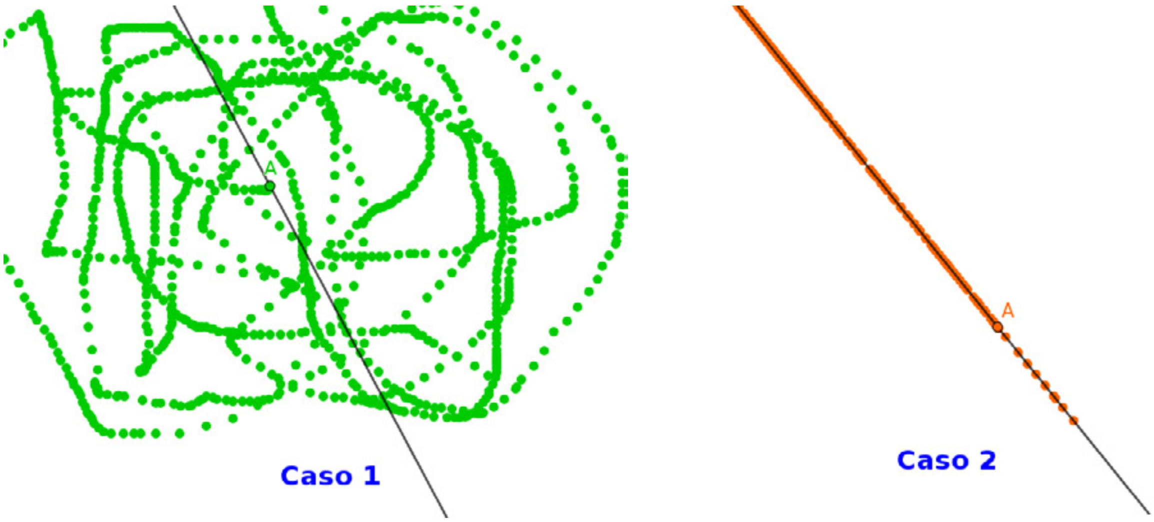

Figura 4. Dos representaciones dinámicas de la expresión .

En términos del comportamiento dinámico, los puntos y las rectas tienen diferentes comportamientos: en el caso 1 el punto se comporta de manera libre y en el caso 2 su comportamiento está ligado a la recta. En cuanto a las rectas, en el caso 1 su comportamiento está vinculado al punto y en el caso 2 permanece fija. En términos del significado geométrico atribuido a estos comportamientos, es posible declarar que el comportamiento dinámico añade propiedades geométricas a estos objetos. En la Figura 2 se muestra que en el AGD de GeoGebra es necesario contar con dos puntos para trazar una recta según los axiomas de la geometría: "dos puntos distintos A y B siempre determinan completamente una única recta. Escribimos AB = a o BA = a" (Hilbert, 1950, p. 2). No obstante, en el mismo texto, Hilbert hace una aclaración sobre expresiones que se deben considerar como equivalentes para definir una recta a partir de dos puntos:

> En lugar de "determinar", también podemos emplear otras formas de expresión; por ejemplo, podemos decir que A "se encuentra sobre" a, A "es un punto de" a, a "pasa por" A "y por" B, a "une" A "y" o "con" B, etc. Si A está sobre a y al mismo tiempo sobre otra recta b, se utiliza también la expresión: "Las rectas" a "y" b "tienen en común el punto A en común", etc. (Hilbert, 1950, p. 2).

La equivalencia de estas expresiones tiene completo sentido si se usan representaciones estáticas. En cambio, con representaciones dinámicas la situación cambia, ya que gracias al comportamiento dinámico, las expresiones *la recta pasa por el punto A* y *el punto A se encuentro sobre la recta* no son equivalentes, lo cual se ha mostrado en la Figura 4, donde cada expresión corresponde al caso

1 y 2 respectivamente. Esta adición de propiedades geométricas a las representaciones dinámicas es un ejemplo de la reducción de la brecha mediacional en comparación con las representaciones estáticas.

Dependencia

Las diferencias de comportamiento dinámico son relevantes debido a que son la puerta de entrada a otras características de las representaciones dinámicas y, en consecuencia, a otra dimensión de los AGD: las dependencias. Si dos diagramas dinámicos representan la misma expresión , ¿por qué tienen comportamientos dinámicos distintos? La respuesta tiene que ver con las dependencias. En el caso 1 se puede preguntar si el punto depende de la recta o si la recta depende del punto, a propósito de su comportamiento dinámico. La respuesta la entrega esta última característica: el punto A es arrastrado de manera libre por el plano, mientras que la recta se mueve según sea arrastrado el punto A: por lo tanto, la recta depende del punto.

Otra manera de dar cuentas de las dependencias entre los objetos de la representación es borrando alguno de los objetos y observando si el otro también se borra o no. Por ejemplo, en el caso 1 al borrar la recta, el punto A permanece en el plano; en cambio al borrar el punto A, la recta también se elimina (ver Figura 5).

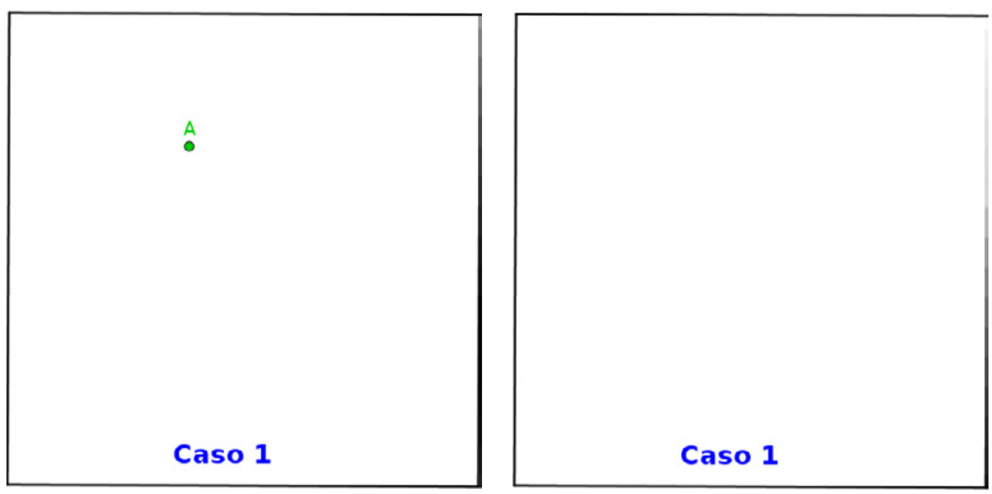

Figura 5. Resultado de borrar la recta (izquierda) y el punto A (derecha) en el Caso 1.

En el caso 2, al borrar la recta el punto A también se elimina; en cambio al borrar el punto A, la recta permanece en el plano (ver Figura 6).

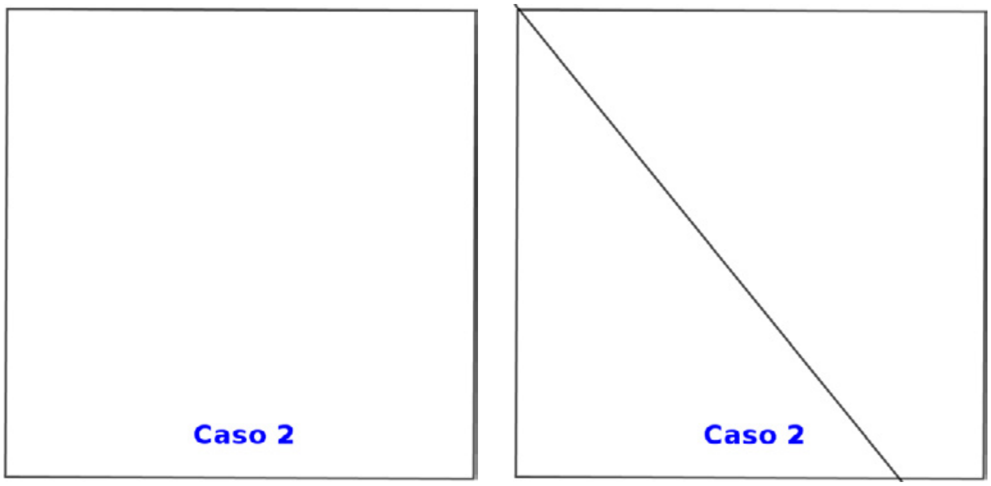

Figura 6. Resultado de borrar la recta (izquierda) y el punto A (derecha) en el Caso 2.

La dependencia permite develar la relación jerárquica entre los objetos de una representación dinámica, algo que es imposible de constatar en las representaciones estáticas, dando así, otra muestra de la reducción de la brecha mediacional producto de las representaciones dinámicas y los AGD.

Temporalidad

En la definición de arrastre como "transformación continua en tiempo real", Goldenberg y Cuoco (1998, p. 351) aluden al tiempo, por lo que es sensato pensar que corresponde a un aspecto relevante de los AGD. No obstante, el tiempo generalmente queda relegado a segundo plano, en desmedro del dinamismo. Al respecto, en esta sección se muestra el rol de la dimensión temporalidad de los AGD gracias al ejemplo de la expresión y sus dos casos dinámicos. Luego de dar cuenta del comportamiento dinámico y de las relaciones de dependencia, es natural preguntar: ¿por qué los objetos tienen tal jerarquía en la representación?, ¿qué ha generado las dependencias específicas en cada caso? Las respuestas apuntan a otra dimensión de los AGD y sus representaciones dinámicas: la temporalidad, cuyos elementos corresponden a la secuencia de construcción y el protocolo de construcción.

La jerarquía entre los objetos de una representación dinámica está dada por el orden en que fueron construidos: mientras más cerca del comienzo de la *secuencia de construcción*, mayor jerarquía. De esta manera, en el caso 1 se tiene que la recta depende del punto A, por lo que este punto se ha construido antes que la recta. En cambio, en el caso 2, el punto depende de la recta, por lo que la recta se ha construido primero que el punto.

Otra manera de acceder a la jerarquía de los objetos de la representación dinámica en GeoGebra es activar el *protocolo de construcción* (ver Figura 7), con el cual se accede a la historia completa de la representación: permite navegar (retroceder y avanzar) por la secuencia a través de botones, además de ver el orden de secuencia de construcción y la definición de cada objeto[5].

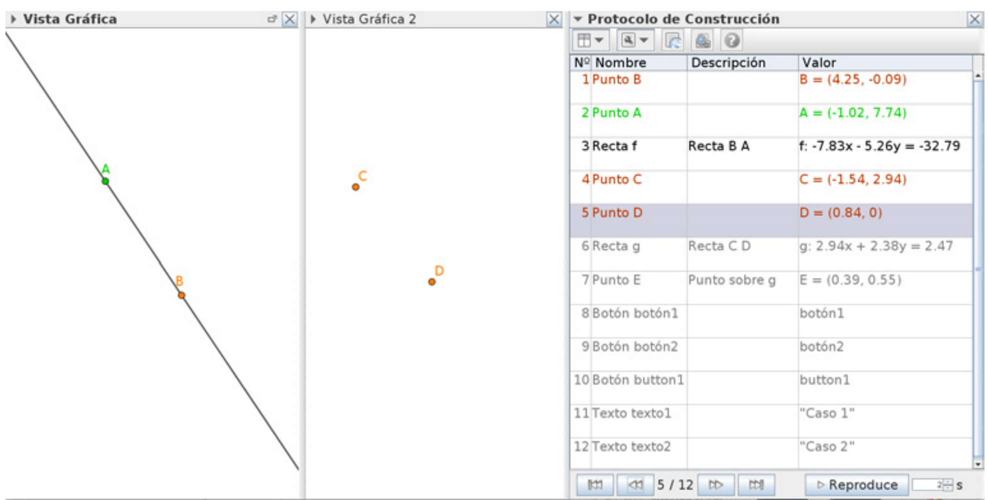

Figura 7. Protocolo de construcción del caso 1 y 2.

De esta manera se ha mostrado que es posible acceder a la temporalidad de los AGD mediante la conjeturación de la secuencia de construcción o al hacer visible el protocolo de construcción, lo cual permite determinar la jerarquía de los objetos que componen una representación dinámica y acceder a su historia completa respectivamente. Esto es una muestra más de la reducción de la brecha mediacional provocada por la GD, ya que con las representaciones estáticas es imposible conjeturar su proceso de construcción. En consecuencia, la presentación de las dimensiones y sus elementos ha permitido dar cuenta del rol mediacional de los AGD de manera detallada, presentación que se sintetiza en la Figura 8.

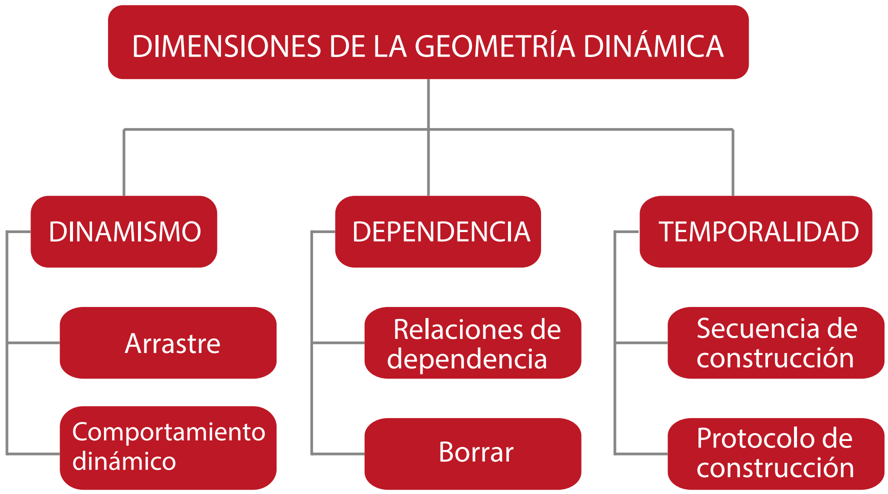

Figura 8. Dimensiones y elementos de los AGD.

Conclusión y recomendaciones

La aparición de los AGD han provocado un cambio en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, así como en la investigación en Educación de la Geometría. En este artículo se ha mostrado cómo esos cambios también pueden interpretarse como una reducción en la brecha mediacional en matemáticas. Específicamente, con la ayuda de las dimensiones y los elementos de la GD, se ha mostrado que esta reducción de la brecha se debe al rol mediacional de la GD traducido en las propiedades geométricas añadidas a las representaciones dinámicas, la posibilidad de develar la relación jerárquica entre los objetos de una representación dinámica, y conjeturar o hacer visible la secuencia de construcción de una representación dinámica.

Si se consideran estas características de manera articulada es posible dar cuenta de la estructura de los objetos geométricos, referida a sus propiedades ideales o abstractas. Con la representación estática sólo se puede ver un caso en particular; si se considera únicamente el arrastre con una representación dinámica, es posible ver muchos casos o un caso que varía; pero al considerar las tres dimensiones y, en definitiva, el rol mediacional de la GD en toda su amplitud, es posible manipular la representación dinámica para acceder y actuar sobre la estructura del objeto geométrico.

De ahí la relevancia de reconocer la reducción de la brecha mediacional que ha provocado la aparición de los AGD, ya que permite hacer nuevas y más cosas con la geometría, tanto en su enseñanza y aprendizaje, como en la investigación en Educación de la Geometría.

En términos de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, permite que las y los estudiantes puedan acceder a la estructura de los objetos geométricos mediante la manipulación de las representaciones dinámicas. Esto implica un acercamiento más activo en el estudio de la geometría, en comparación con el "típico énfasis pasivo en el vocabulario (nombrando y clasificando formas según sus propiedades)" de la geometría escolar (Sinclair y Bruce, 2015, p. 320).

En cuanto a la investigación en educación de la geometría, el rol mediacional de los AGD traza nuevas rutas de investigación centradas en la estructura de los objetos geométricos, de las cuales un paso natural es ahondar en la construcción geométrica en AGD, ya que entender la estructura de un objeto geométrico es entender la estructura de su construcción. Esto se vislumbra como un aporte relevante para la investigación con AGD, ya que se ha reportado que hay "poca investigación que se ha enfocado en las construcciones geométricas, a pesar de su rol central en la geometría" (Sinclair *et al.*, 2017, p. 480).

La reducción de la brecha mediacional y el rol mediacional de la GD dan cuenta de nuevos aspectos a trabajar con la geometría, por lo que una caracterización de la construcción geométrica en AGD sería un buen comienzo para futuras investigaciones, donde el dinamismo, la dependencia y la temporalidad tienen un rol importante a desempeñar.

Referencias bibliográficas

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, *34*, 66–72. https://doi.org/10.1007/BF02655708

Baccaglini-Frank, A. E. y Mariotti, M. A. (2010). Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. I*nternational Journal of Computers for Mathematical Learning, 15*, 225–253. https://doi.org/10.1007/s10758-010-9169-3

Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M. A., Ainley, J., Andresen, M., Chan, Y. C., Dana-Picard, T., Gueudet, G., Kidron, I., Leung, A., y Meagher, M. (2009). Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. En C. Hoyles y J. B. Lagrange. (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (pp. 89–132). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_7

Erez, M. M., y Yerushalmy, M. (2006). "If You Can Turn a Rectangle into a Square, You Can Turn a Square into a Rectangle ..." Young Students Experience the Dragging Tool. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 11*, 271–299. https://doi.org/10.1007/s10758-006-9106-7

Fahlgren, M., y Brunström, M. (2014). A Model for Task Design with Focus on Exploration, Explanation, and Generalization in a Dynamic Geometry Environment. *Technology, Knowledge and Learning, 19*, 287–315. https://doi.org/10.1007/s10758-014-9213-9

Freiman, V. (2020). Types of Technology in Mathematics Education. In: S. Lerman, (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 869-879). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_158

Goldenberg, E. P,. y Cuoco, A. A. (1998). What is Dynamic Geometry? En R. Lehrer y D. Chazan (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space* (pp. 351–367). https://doi.org/10.4324/9780203053461

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 1* (pp. 138–152). Hiroshima University.

Healy, L. (2003). Using the transformation tools of Cabri- Géomètre as a resource in the proving process. En J. B. Lagrange, M. Artigue, D. Guin, C. Laborde, D. Lenne, y L. Trouche (Eds.), *Actes du Colloque européen: Intégration des Technologies dans l'Enseignement des Mathématiques.* IUFM Champagne Ardenne.

Hilbert, D. (1950). *The Foundations of Geometry*. The open court publishing company.

Hölzl, R. (2021). Using Dynamic Geometry Software to Add Contrast to Geometric Situations – A Case Study. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 6*, 63–86. https://doi.org/10.1023/A:1011464425023

Kaur, H. (2015). Two aspects of young children's thinking about different types of dynamic triangles: prototypicality and inclusion. *ZDM, 47*(3), 407–420. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0658-z

Komatsu, K. y Jones, K. (2020). Interplay between Paper-and-Pencil Activity and Dynamic-Geometry-Environment Use during Generalisation and Proving. *Digital Experiences in Mathematics Education, 6*(2), 123–143. https://doi.org/10.1007/s40751-020-00067-3

Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions: Two sides of the use of dynamic geometry environments. En S.-C. Chu, H.-C. Lew, W.-C. Yang y H.-K. Taehakkyo (Eds), *Proceedings of the 10th Asian Technology Conference in Mathematics* (pp. 22–35). Korean National University of Education. https://atcm.mathandtech.org/EP/2005/2005P279/fullpaper.pdf

Leung, A. (2008). Dragging in a dynamic geometry environment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13*(2), 135–157. https://doi.org/10.1007/s10758-008-9130-x

Leung, A. (2015). Discernment and Reasoning in Dynamic Geometry Environments. En S. J. Cho (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 451–469). https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_26

Leung, A., Baccaglini-Frank, A., Mariotti, M.A. & Miragliotta, E. (2023). Enhancing Geometric Skills with Digital Technology: The Case of Dynamic Geometry. En B. Pepin, G. Gueudet y J. Choppin (Eds.), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education* (pp. 1-30). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_15-1

Miragliotta, E. y Baccaglini-Frank, A. (2021) Enhancing the skill of geometric prediction using dynamic geometry. *Mathematics 9*(8), 821. https://doi.org/10.3390/math9080821

Moreno-Armella, L. y Sriraman, B. (2005). The articulation of symbol and mediation in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 37*(6), 476–486. https://doi.org/10.1007/BF02655856

Moreno-Armella, L. (2018). La geometría en el mundo moderno. *Praxis, Educación y Pedagogía*, (2), 8-35. https://doi.org/10.25100/praxis_educacion.v0i2.7800

Moreno-Armella, L., Hegedus, S. y Kaput, J. (2008). From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics, 68*(2), 99–111. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9116-6

Pletser, V. y Huylebrouck, D. (1999). The Ishango artefact: the missing base 12 link. *Forma, 14*(4), 339-346. https://forma.katachi-jp.com/pdf/1404/14040339.pdf

Real Academia de Española (2022). Brecha. *Diccionario de la lengua española.* https://dle.rae.es/brecha

Rubio-Pizzorno, S. (2020). Impulsando la Educación Abierta en Latinoamérica desde la Comunidad GeoGebra Latinoamericana. *Revista Do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, 9*(1), 10–25. https://doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i1p10-25

Sinclair, N., y Bruce, C. D. (2015). New opportunities in geometry education at the primary school. *ZDM, 47*(3), 319–329. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0693-4

Sinclair, N., Cirillo, M., & de Villiers, M. (2017). The Learning and Teaching of Geometry. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 457–489). National Council of Teachers of Mathematics Education. https://www.nctm.org/Store/Products/Compendium-for-Research-in-Mathematics-Education-(Download)/

Sinclair, N., y Yurita, V. (2008). To be or to become: how dynamic geometry changes discourse. *Research in Mathematics Education, 10*(2), 135–150. http://doi.org/10.1080/14794800802233670

Talmon, V., & Yerushalmy, M. (2004). Understanding dynamic behavior: Parent–Child relations in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics, 57*(1), 91–119. https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000047052.57084.d8

Yanik, H. B. (2013). Learning geometric translations in a dynamic geometry environment. *Education and Science, 38*(168), 272–287. http://egitimvebilim.ted.org.tr/index.php/EB/article/view/1585/595

Notas

[1] Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Ciudad de México, México. Estudiante del Doctorado en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Ciudad de México, México. Correo electrónico: sergio.rubio@cinvestav.mx ORCID: 0000-0003-3624-1829

[2] Doctora en Ciencias en Matemática Educativa, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Ciudad de México, México. Investigadora titular del Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Ciudad de México, México. correo electrónico: gmontiele@cinvestav.mx ORCID: 0000-0003-1670-9172

[3] Doctor en Ciencias en la Especialidad de Matemáticas, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Ciudad de México, México. Investigador titular del Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Ciudad de México, México. Correo electrónico: lmorenoarmella@gmail.com ORCID: 0000-0001-5055-5782

[4] Acceder a la representación dinámica en el siguiente enlace: https://www.geogebra.org/m/vfuwsucs

[5] En la Figura 7 se observan los puntos B, C y D que definen a cada una de las rectas, pero que para efectos del ejemplo se han ocultado y por eso no aparecen en las figuras anteriores.