EVOLUCIÓN DEL CONCEPTO DE **FUNCIÓN** COMO RESPUESTA A PROBLEMAS DE LA HUMANIDAD

Evolution of the concept of function in response to problems of humanity

•••

Evolução do conceito de função em resposta aos problemas da humanidade

Por:

Fabián Porras Torres[1]

iD: 0000-0001-8262-7488

Docente Colegio Jefferson, Yumbo, Colombia

fporras@jefferson.edu.co

Recepción: 31/03/2016 • **Aprobación:** 15/03/2018

Resumen: Este estudio se apoya en el modelo de Stephen Toulmin para hacer un seguimiento a la evolución del concepto de función, desde la época antigua hasta cuando el concepto de función adquiere su estatus de objeto matemático, pasando por la edad media e identificando los problemas que dieron lugar a las diversas variaciones conceptuales que derivaron en el concepto como se conoce actualmente.

Palabras Clave: Función; Modelo de Toulmin; Evolución; Problemas; Variaciones conceptuales.

Abstract: This study is based on Stephen Toulmin model to track the evolution of the concept of function, from the ancient epoch to when the concept of function acquires the status of mathematical object, passing through the middle ages, and identifying the problems that gave rise to various conceptual variations that led to the concept as it is currently known.

Keywords: Function; Toulmin model; Evolution; Problems; Conceptual variation.

Resumo: Este estudo baseia-se no modelo de Stephen Toulmin para acompanhar a evolução do conceito de função, desde a antiguidade até quando o conceito de função adquire seu status como objeto matemático, através da Idade Média e identificar os problemas que deram colocar as várias alterações conceptuais que conduziram ao conceito tal como é actualmente conhecido.

Palavras-Chave: Função, Modelo Toulmin; Evolução; Problemas; As variações conceituais.

Procedencia: Este artículo no recibió financiación.

¿Cómo citar este artículo? / *How to quote this article?*
Porras-Torres, F. (2018). Evolución del concepto de función como respuesta a problemas de la humanidad. *Praxis, Educación y Pedagogía,* (1), 78-105. Doi: 10.25100/praxis_educacion.v0i1.6466

Introducción

Numerosos estudios evidencian la complejidad de este concepto tanto en su génesis como en la construcción personal que de él debe hacer cualquier estudiante en la actualidad. En cuanto a su génesis, esta puede remontarse incluso a la edad antigua puesto que desde 4000 años atrás estaba presente, aunque en un estatuto protomatemático, en las culturas babilónicas ligado implícitamente a tablillas de registro de observaciones astronómicas, y en la cultura Griega en los estudios sobre relaciones entre magnitudes geométricas variables. Posteriormente y aun conservando el mismo estatuto, en la edad media se encuentra presente en el estudio de fenómenos naturales centrados en las relaciones entre cantidades variables dependientes e independientes y ya en la era moderna, haciendo su transición entre el estatuto paramatemático y el estatuto matemático, aparece a lo largo de todos los desarrollos matemáticos relacionados con la extensión del concepto de número, la creación del álgebra simbólica, el estudio del movimiento y la unión álgebra-geometría (Sastre, Rey y Boubée 2008).

Siguiendo a Youschkevitch (1976) y atendiendo lo expuesto en el párrafo anterior, se consideran tres etapas en este estudio:

Época Antigua (2000 A.C – 500 D.C):

Se hace referencia aquí a las matemáticas conocidas como antiguas o prehelénicas (desarrolladas en las antiguas civilizaciones de Egipto, Mesopotamia, China e India) y se incluyen las matemáticas helénicas. Aunque la egipcia llevaba la batuta, cada civilización antigua hizo aportes que configuraron el marco en que se gestaron los problemas que, se considera, propulsaron la génesis de las primeras nociones de función. En cuanto a sistemas de numeración los egipcios crearon uno basado en jeroglíficos que posteriormente, inspiró el sistema romano; los babilónicos utilizaban un sistema sexagesimal, la china antigua y la india antigua utilizaron sistemas de base diez y fueron más allá: implementaron el cero. Estas culturas también desarrollaron, aunque de manera rudimentaria, un álgebra. Los egipcios llegaron a resolver lo que hoy se conoce como ecuaciones de primer grado. Los indios implementaron correctamente la regla aritmética de cálculo. Los mesopotámicos introdujeron el concepto de número inverso alcanzando la solución de algunos sistemas de ecuaciones y la implementación de algoritmos para calcular sumas de progresiones.

Los chinos tuvieron como aporte principal la creación del "método del elemento celeste", desarrollado por Chou Shi Hié, para encontrar raíces enteras

e-ISSN: 2619-4791 • doi: 10.25100/praxis_educacion.v0i1.6466

y racionales, e incluso aproximaciones decimales para ecuaciones de la forma $Pn(x)= a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$. Esta época se caracteriza inicialmente por la preocupación por el conteo y, posteriormente ante la ausencia de una idea abstracta de variable, por utilizar, como métodos de registro de las cantidades, tablas, descripciones verbales o gráficos. Cuando se hace referencia a cantidades se incluye también resultados de operaciones que ahora se conocen como binarias y de progresiones geométricas. Ya en la cultura helénica aparecen problemas que en la actualidad se llaman "clásicos", como la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo cuya búsqueda de solución trajo consigo la creación de diferentes curvas por parte de Apolonio, Arquímedes y Pappus, entre otros.

Resulta evidente que el trabajo matemático se caracterizó por la búsqueda de herramientas o métodos para contar o para registrar cantidades, ya sean observadas o calculadas. Por tanto, la identificación de dos problemas (el registro escrito, bien sea de observaciones de dos cantidades relacionadas, o bien sea de valores calculados para cantidades numéricas en las culturas babilónicas, y el problema relativo a la determinación de relaciones entre cantidades geométricas variables en la cultura helénica) lleva a considerar esta etapa como unidad de análisis en este estudio pese a que aún no se aborda el problema del movimiento como sucederá en la etapa siguiente.

Edad Media (476 D.C – 1453 D.C):

Esta etapa inicia con la caída de Roma y termina con la toma por parte de los turcos de Constantinopla. Suele pensarse que en esta época no hubo avances en las ciencias, incluida la matemática, pero sólo es que, comparativamente con la época helénica, los avances fueron menores. Europa se encuentra difuminada en pueblos aislados, su cultura se ha alejado de la herencia griega, pero los árabes recuperan buena parte de ese legado dando al mundo las bases de la aritmética y del álgebra. Es el estudio de los fenómenos naturales lo que importa ahora, y es justamente lo que produce avances en la concepción de variable tanto dependiente como independiente y en los medios de representación de propiedades que cambian, evidenciándose como característica epistémica en esta etapa el estudio del cambio, en particular del movimiento, problema que propulsiona la evolución del concepto de función y que hace considerar esta etapa separadamente en este estudio.

Periodo Moderno (desde finales del siglo XVI):

A finales del siglo XVI y comienzos del XVII se inicia un período de adelantos fundamentales para las matemáticas modernas: se extiende el concepto de número, se crea el álgebra simbólica, se produce la unión entre el álgebra y la geometría (a partir de ahora, la geometría se subordina al álgebra). Todo esto gracias a que el estudio del movimiento (movimiento de puntos que describían curvas, cuerdas vibrantes, flujo de calor) es el problema central para las ciencias (Kleiner, 1989) y las matemáticas se tornan en modelo racional a seguir en su solución. En los inicios de este período el concepto de función se encuentra fuertemente vinculado a expresiones analíticas, y aun es una mera herramienta para expresar relaciones entre cantidades que dependen una de otra, sin embargo, es en esta etapa que el concepto de función se convierte en un problema en sí mismo adquiriendo el estatuto matemático.

Modelo de análisis

Este estudio se apoya en el modelo de Stephen Toulmin (1977) sobre la evolución de los conceptos. Él considera importante estudiar aquellos problemas que surgen entre el sujeto y el medio y los que surgen entre los sujetos miembros de una comunidad, pues como fruto de esas interacciones se produce, según él, el avance científico. La acumulación gradual en el acervo cultural, de modificaciones en los métodos de solución de esos problemas es la que configura, en un proceso continuo y secuencial, el progreso científico. Por eso es importante considerar lo que se configura como problema y bajo qué condiciones. A este respecto Toulmin afirma: "Los problemas surgen (sostengo) cuando nuestras ideas sobre el mundo están en conflicto con la naturaleza o entre sí, esto es, cuando nuestras ideas corrientes quedan atrás, en algunos aspectos remediables, de nuestros ideales intelectuales." (Toulmin, 1977, p. 160)

Es de resaltar el conflicto cognitivo como fuente de los problemas y, por supuesto, del progreso científico; Toulmin lo describe a través de la diferencia entre los "ideales intelectuales" (I) y la "capacidad corriente" (C):

Problemas científicos = Ideales explicativos-Capacidades corrientes.

Para él los ideales explicativos están constituidos por las concepciones compartidas por la comunidad de la disciplina sobre la forma que debe tomar una explicación completa del fenómeno; les llama ideales porque para Toulmin la realidad sólo puede conocerse por aproximaciones sucesivas siempre superables.

e-ISSN: 2619-4791 • doi: 10.25100/praxis_educacion.v0i1.6466

Las capacidades corrientes hacen referencia a teorías, instrumentos técnicos y demás patrimonios históricos que conforman la disciplina y permiten abordar la solución de problemas actuales. La diferencia arriba expuesta es la que promueve el avance científico y favorece el cambio conceptual; este puede configurarse desde diversas variaciones conceptuales que pueden o no conducir a caminos exitosos.

Lo que se presenta a continuación es justamente la identificación de variaciones conceptuales que llevaron a la configuración actual del concepto de función; en la medida en que se vayan presentando los problemas que movilizaron la noción de función en cada época, se irán también presentando las respectivas nociones o definiciones de función y las probables variaciones conceptuales que condujeron por los caminos que se describen. Es de aclarar que este estudio no agota el modelo de estudio propuesto por Toulmin si no que se apoya en él.

Desarrollo del estudio

Época Antigua (2000 A.C - 500 D.C):

Inicialmente en la antigua Babilonia (2000 a. c 600 a. c) el hombre asumía el mundo como elemento independiente de sus propias decisiones, se veía más bien él como supeditado al albedrío de ese mundo, es decir, se sentía frágil ante su entorno. Por esta razón busca cómo halagar a los elementos que él, por considerar más inalcanzables, les atribuía más poder: los astros celestes. Así que los idolatra, les ora, les ofrece sacrificios y ofrendas.

Pero esto hace necesario estar pendiente de los resultados de estas acciones, la observación de esos astros se va convirtiendo casi en sistemática, arrojando como frutos registros escritos de los cuales sobreviven tablillas de arcilla con las cuales el hombre buscaba, inicialmente, evidencia de cambios en el comportamiento de los astros: es necesario buscar pues regularidades en los cambios registrados, esto lleva al estudio de problemas de variación continua: luminosidad de la luna en intervalos de tiempo iguales, períodos de visibilidad de algunos planetas en relación con el ángulo con el sol y otros. En sus cálculos usaban tablas sexagesimales de cuadrados y raíces cuadradas, de cubos y de raíces cúbicas, también potencias sucesivas. No expresaban los resultados de sus análisis de forma general, sólo aparecen en sus tablas casos concretos a los que les buscaban generalidades sin llegar a formulaciones genéricas (Ruiz, 1998), es decir, introducen el problema presente en la pregunta:

> ***P_1:*** ¿qué regularidades existen en la relación entre cantidades de diferentes magnitudes variables?

Autores como Pedersen (1974), ven en estos trabajos:

IF: Instinto de funcionalidad. Se expresa como una *relación muy general que asocia elementos de dos conjuntos,* fruto de su profundización en métodos cuantitativos al tratar de aritmetizar observaciones difícilmente medibles, mediante lo que ahora se llamaría extrapolaciones e interpolaciones en busca de regularidades tal como lo evidencian las numerosas tablas dejadas por las culturas babilónicas.

Pero este mero instinto no llega a vislumbrar aun los cambios y su relación pues los trabajos de las culturas babilónicas versaban solamente sobre casos concretos, sin llegar a formulaciones aunque buscaran regularidades. Los valores de las magnitudes son sólo vistos como puntuales, discretos, particulares, sin llegar aun a las ideas de cambio y de cantidad variable concebidas más adelante por el pensamiento griego al producir la variación conceptual (V_1), desde IF hacia una noción menos lejana a la de función.

NCR: Noción de cambio y de relación. Noción ajena a las matemáticas, pero presente en el pensamiento griego como idea muy primitiva de función. Se expresa como una "noción de cambio y relación entre magnitudes variables" (Ruiz, 1998:108). Para los griegos la concepción de variabilidad era exclusiva de las magnitudes físicas y externa a los objetos matemáticos considerados estáticos. La respuesta al problema P_1 se manifiesta en la creación de las proporciones las cuales se constituyen, en este momento histórico, en el mejor medio para comparar magnitudes que, además, estaban completamente desprovistas de su carácter numérico. Esta separación entre números y magnitudes alimentada por la inconmensurabilidad que ratificaba a los números como enteros y discretos y a las magnitudes como continuas hizo construir una versión discreta de los fenómenos naturales oponiéndose por siglos al avance en la construcción del concepto de función.

Edad Media (476 D.C – 1453 D.C):

Ya en el siglo XIII, la búsqueda no sólo de explicación de los fenómenos si no, además una explicación racional produce el problema P_2 generado por la pregunta:

> ***P_2:*** ¿por qué ocurren los fenómenos naturales sujetos al cambio y al movimiento?

e-ISSN: 2619-4791 • doi: 10.25100/praxis_educacion.v0i1.6466

NCR da cuenta del cambio, pero no del por qué, empieza pues a tornarse insuficiente para dar respuesta a esta nueva pregunta planteada en el marco de una época signada por la racionalidad y la búsqueda de "lo real, lo permanente, lo inteligible, tras el mundo cambiante de la experiencia sensible…" (Crombie, 1979:29. citado por Ruiz, 1998, p.111). Esta pregunta surge, aproximadamente a comienzos del siglo XIII, en particular está referida a fenómenos que incluían movimiento. Se buscaba un modelo que respondiese a todas las cuestiones, la matemática entonces se convierte en la ciencia racional modelo para estas explicaciones tendiendo a ocupar cada vez un lugar más importante en las ciencias de la naturaleza poniendo en duda la demarcación establecida por Aristóteles entre estas y las matemáticas, o sea la variación conceptual V_2. Filósofos como Grosseteste y Bacon llegan a afirmar que las matemáticas son el principal instrumento para estudiar los fenómenos naturales, lo que desembocó, como fruto de un largo proceso de cerca de cuatro siglos, que en el siglo XIV se otorgara gran atención a la formulación matemática nutrida de la cuantificación de los movimientos (Crombie, 1979) sustituyendo la pregunta P_2 por la pregunta P_3:

$\boldsymbol{P_3}$**:** ¿cómo suceden los cambios en los fenómenos naturales?

NCR es ahora aún más insuficiente, no da cuenta ni del por qué ni del cómo de los cambios que registra, de modo que no da respuesta a las necesidades. Se ha producido el desequilibrio y urge encontrarlo: Heytesbury y Swineshead habían desarrollado en Inglaterra la teoría de la intensidad de formas y con ella, una cinemática-aritmética mientras en Francia Oresme se orientaba hacia la geometría, de modo que, en ambos casos, el movimiento era estudiado matemáticamente por primera vez en términos de distancia y tiempo, contribuyendo al desarrollo de la variación conceptual V_3:

RF: relación funcional: *se expresa como una relación cualitativa entre el fenómeno a explicar y las condiciones necesarias y suficientes para su producción. Es, básicamente, una relación cualitativa causa-efecto en la que se muestra claramente cómo están relacionados los cambios en lo que ahora llamaríamos variable dependiente con los cambios en lo que ahora llamaríamos la variable independiente,* es decir, la descripción de los fenómenos se hace desde el "cómo" (lo que no alcanzaba NCR), pero es fruto más de especulaciones teóricas que de la experiencia con el mundo físico, debido tal vez a una escasa sistematicidad en las medidas que no se alcanzaría hasta el siglo XVII, por esta razón la citada idea de relación funcional (RF) se desarrolló sólo en principio y fue expresada por dos métodos principalmente: El "Álgebra de palabras" de Bradwardino de Oxford en el que se empleaban letras del alfabeto para representar las cantidades variables y las operaciones se indicaban con palabras, y el método geométrico, de Oresme, que acudía a las gráficas para representar la forma en que las cosas varían. El objetivo de Oresme era representar "las intensidades" de una cualidad de una magnitud continua, que depende de otra análoga, pero como aún se conserva la noción de número como conjunto de unidades. Oresme debe acudir a utilizar segmentos (que sí son continuos) para representar las magnitudes y sus cambios. Sus representaciones, como las del Álgebra de palabras, son más cualitativas que cuantitativas, existe en ese entonces un desfase entre las especulaciones teóricas y las herramientas matemáticas y de medición disponibles, aspectos que constituyen una necesidad latente durante siglos y que no permitía el avance de la descripción de los fenómenos físicos. Nuevamente se tiene un desequilibrio entre la necesidad y lo disponible.

Periodo Moderno (desde finales del siglo XVI):

El estudio del movimiento ha traído consigo nuevas preguntas, todas ellas referidas a las relaciones entre cantidades variables:

> ***P_4:*** ¿cómo expresar de manera funcional la relación entre las causas y los efectos?

Galileo (1564-1642) tuvo gran empeño en buscar resultados y relaciones en la experiencia más que en la abstracción. La experiencia para él estaba favorecida por nuevos instrumentos de medida que introdujeron aspectos cuantitativos donde antes no existían. RF permitía expresar relaciones entre variables pero de una manera cualitativa, para Galileo esto no es suficiente, los nuevos instrumentos de medida le arrojan resultados que superan lo expresable con RF, el desequilibrio ha sido establecido. René de Cotret afirma que es en este contexto que, el desarrollo de la concepción de variable dependiente (gracias a los trabajos de Galileo), vital en el establecimiento de relaciones causa-efecto de manera cuantitativa, contribuyó enormemente a la evolución de la noción de función (R. de Cotret. 1988:13, citado por Ruiz, 1998:117). En particular se identifica en este momento histórico la variación conceptual V_4, es decir, el paso de RF a una noción aún más cercana de función:

RFC: Relación funcional expresada cuantitativamente: *Noción que se expresa como una relación funcional causa-efecto expresada cuantitativamente.*

Dichas relaciones eran verificables mediante la observación y la medición, pero Galileo aun expresa sus leyes de manera homogénea, en forma de proporciones, conservando el carácter que durante muchos siglos estancó el concepto de función dándole lugar al concepto de ecuación y encubriendo aspectos de la variación continua.

e-ISSN: 2619-4791 • doi: 10.25100/praxis_educacion.v0i1.6466

En este punto de la historia resulta interesante llamar la atención sobre un detalle trascendente para este estudio; el hombre sigue buscando respuesta a la pregunta sobre cómo expresar las relaciones entre cantidades variables (en este momento en particular las relaciones entre cantidades y el tiempo), entre las causas y los efectos, pero de esas búsquedas ha emergido un objeto matemático: función, el cual trae consigo preguntas que, sin hacer sombra a las ya mencionadas, se toman buena parte del trabajo de los hombres de ciencia del momento:

> $\boldsymbol{P_5}$: ¿Qué entidades se pueden clasificar dentro de la categoría de funciones? ¿Cómo definir función? ¿Cómo es correcto expresarla?

Hasta el siglo XVII la relación entre el álgebra y la geometría era de subordinación de la primera respecto de la segunda. Para la geometría sólo existían aquellas curvas que pudieran trazarse con regla y compás. Esta situación restringía al álgebra en su campo de aplicación y a la geometría en el espectro de curvas conocidas, puesto que algunas construcciones geométricas eran casi imposibles. Las dos empiezan a tornarse insuficientes frente a las necesidades que la humanidad le planteaba a la ciencia que consideraba modelo de racionalidad. La diferencia ideales explicativos - capacidades corrientes se ha producido; primero Vieta (1540-1603) y luego René Descartes (1596 - 1650), buscan resolver problemas de construcciones geométricas mediante el álgebra dándole sentido a esta desde la geometría. Pierre Fermat (1601-1655) por su parte, hace lo mismo apoyado en los trabajos de Vieta (Kline, 1992: 402-403. Citado por Delgado, 1998:178). Vieta ve posible expresar la igualdad y la proporción entre magnitudes mediante el álgebra (Kline, 1972, citado por Sastre, Rey, Boubée, 2008:145) y Descartes (y Fermat) establece que una curva se puede construir con sólo su expresión algebraica superando el criterio –griego– que exigía la constructibilidad de la línea para aceptar la existencia de una curva (Delgado, 1998), ampliando el espectro de curvas conocidas distinguiendo, incluso, entre curvas geométricas y curvas mecánicas. De esta manera, afirma Youschkevitch (1976) es a Descartes a quien se le debe la idea de presentar una función en forma analítica al determinar que una ecuación en x y y muestra la dependencia entre dos cantidades variables. RFC ahora se queda corta, ya no es suficiente establecer una relación funcional aunque sea cuantitativamente, la combinación álgebra-geometría (lo que podría llamarse algebreización de la curvas) posibilita predicciones operacionales para las relaciones funcionales. Es necesaria la variación conceptual V_5. Apoyado en Descartes, Gregory (1638 - 1675) realizará la distinción entre funciones "algebraicas" y "trascendentes" y en 1667, da una definición más explícita de función:

COD: Cantidad obtenida de otras: *una función es una cantidad que se obtiene de otras cantidades mediante una sucesión de operaciones algebraicas o mediante cualquier otra operación imaginable.*

Según Youschkevitch (1976) este paso a expresar funciones en términos de ecuaciones tuvo un poderoso efecto en el desarrollo de las matemáticas pues le otorgó el verdadero estatus de cálculo al estudio de las funciones. Similarmente, Sierpinska (1992) le otorga un gran valor al desarrollo de la notación algebraica en la superación del obstáculo epistemológico de la diferenciación entre número y magnitud. Sin embargo, es importante mencionar que este logro también produjo lo que Ruiz (1998) llamó encantamiento con el álgebra que, a la larga, se constituyó en obstáculo epistemológico para el concepto de función: considerar como funciones sólo aquellas que pudieran expresarse algebraicamente.

> El desarrollo del cálculo diferencial e integral se apoya primordialmente en la existencia del álgebra, de la variable y del método de las coordenadas, pero lo que realmente motiva y dirige todo este proceso es el empeño por buscar solución a los problemas de la mecánica, la astronomía y la física, problemas que abundan en situaciones de dependencias funcionales. Ya no es suficiente con explicar cómo ocurren los fenómenos, el hombre busca también predecirlos. Dos hombres abordan, casi de manera simultánea pero a distancia, estos problemas: Newton y Leibniz. Newton los aborda desde una concepción mecanicista en la que (influenciado por Isaac Barrow, su maestro) interpreta las variables dependientes como cantidades que poseen una velocidad de cambio y este cambio discurre de manera continua en el tiempo (noción universal, de fluir constante).

Con Newton se produce la variación conceptual V_6; los problemas de la mecánica están estrechamente ligados al tiempo, para Newton este se convierte en la "…noción universal e interpreta las variables dependientes como cantidades que transcurren de forma continua y poseen una velocidad de cambio…, *la función es una fluente, es decir, una cantidad que transcurre en el tiempo*, la derivada es la fluxión, y sirve para estudiar las variaciones de la fluente." (Ruiz, 1998:123). Esta noción de función, fruto de la variación conceptual V_6, puede denominarse CVT: Cantidad que transcurre en el tiempo.

Es notable como está implícito en este concepto, el concepto de variable dependiente, es decir, magnitud cuya variación es producida por la variación de otras en el tiempo.

e-ISSN: 2619-4791 • doi: 10.25100/praxis_educacion.v0i1.6466

Por su parte, Leibniz se apoyó en un contexto principalmente geométrico ligando elementos geométricos a una curva. La diferencial (dy) de una ordenada, la define como un segmento tal que su relación a dx sea igual a la relación entre la ordenada y la subtangente. Para él el término función designa cualquier cantidad que varía de un punto a otro de la curva. La necesidad de disponer de un término para designar cantidades que dependen de una variable ya es evidente, tal y como lo señala Youschkevitch (1976) acerca de la obra de Bernoulli y de Leibniz, y esta necesidad conducirá a utilizar el término función con este fin, pero haciendo referencia sólo a aquellos casos expresables de manera analítica. Esto constituye una nueva variación conceptual: V_7, identificable en un artículo de Jean Bernoulli titulado "Remarques sur ce qu ón a donné jusqu íci de solutions des problèmes sur les isopérimètres" publicado en 1718 en las memorias de la Real Academia de Ciencias de París (Youschkevitch, 1976) en el que, por primera vez, se hace referencia explícita a una función como una expresión analítica:

FMV: Función de una magnitud variable: *"llamamos función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier manera que sea de esta magnitud variable y de constantes"* (Bernoulli citado por Boyer, 1986:531).

Bernoulli, incluso, propone la letra *f* para denotar la función, escribiendo *fx*, sin paréntesis. Si se lee con cuidado lo escrito por Bernoulli, no se encuentra allí evidencia que indique que las funciones se expresaran analíticamente, sin embargo muchos historiadores coinciden en afirmar que en esta época las funciones se pensaban como expresiones analíticas.

Es importante observar que, en el pensamiento de los matemáticos de entonces, ya se tiene un nombre para la función, se tiene conciencia de ella y se utiliza como herramienta, es decir, tiene un estatuto paramatemático y está en transición a ser objeto en sí misma de estudio (estatuto matemático), lo cual, se podría afirmar, ocurre a partir de Euler (alumno de Bernoulli), (Boyer, 1959) quien piensa que el concepto de función es el organizador de todos los demás conceptos del cálculo (Delgado, 1998) y propulsa la transición del cálculo vinculado estrechamente con la geometría, al cálculo que se ocupa de funciones. Vale recordar que, en este punto de la historia, el análisis infinitesimal es la disciplina científica en boga, y aunque está íntimamente relacionada con la física, la geometría y la mecánica, ha ido adquiriendo su estatus de disciplina independiente: "Tous les concepts initiaux du calcul perdent graduellement leur carapace géométrique et mécanique, prennent une formulation arithmétique ou algébrique et commencent à être appréhendés comme précédant logiquement les concepts semblables des autres sciences exactes." afirma Youschkevitch, (1976:35).

El concepto de función no es la excepción, así que su definición ya no podía estar en términos generales, no expresados de manera analítica como era debido de acuerdo con los "cánones" del momento. Euler escribe entonces una nueva definición acorde con el momento histórico, apoyándose en la de su maestro Bernoulli pero cambiando el término cantidad por el de expresión analítica, término con el que hace referencia a las operaciones algebraicas incluyendo los procesos de paso al límite abarcando entonces, como funciones, los polinomios, las funciones que se obtienen de series infinitas y las funciones trascendentes (Delgado, 1998). A este paso en la noción de función se le puede denominar variación conceptual V_8. En las palabras de Euler:

FEA: Función como expresión analítica: *"una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de una manera arbitraria por esa variable y por números o cantidades constantes"* ("Introductio in anlysis infinitorum", escrita por Euler en 1744 pero publicada en 1748. Citado por Delgado, 1998:190).

Es entonces Euler el autor del desarrollo ulterior del concepto de función y quien desarrolla un estudio centrado en dicho concepto, es decir, lo considera un objeto de estudio; se puede afirmar que es en este momento cuando el concepto de función obtiene el estatuto matemático (Delgado, 1998) puesto que se formulan las primeras definiciones explícitas y se propone una clasificación para las funciones siendo estudiadas como objetos matemáticos.

Sin embargo, Euler restringía el concepto de función a las expresiones analíticas y creía que la manera más general y mejor de representarlas era a través de series de potencias enteras. Los matemáticos de la época compartían esta creencia y pensaban que toda función podía expresarse de esta manera. Esto tuvo como consecuencia que los estudios se enfocaran en "las formas de representación más que en una relación entre variables en la cual la variable dependiente debe ser determinada unívocamente por la variable independiente." (Delgado, 1998:191).

En este punto del desarrollo del concepto de función empiezan a tejerse varias situaciones que configurarán un ambiente que exige nuevos cambios en el concepto, de nuevo se producirá el desequilibrio entre ideales explicativos y capacidades corrientes:

– En ese momento (mediados del siglo XVIII) se hace aún más estrecha la relación entre la noción de función y la noción de curva: si a toda función le corresponde una curva era razonable pensar que a toda curva le corresponde una función. Lo que entra en contradicción con la definición de función del momento, puesto que no toda curva tenía asociada una expresión analítica así que, de acuerdo con la definición, no tenía asociada una función. Euler se ve entonces abocado a admitir como funciones las llamadas curvas mecánicas, es decir aquellas que su gráfico se ve como la trayectoria que describe un punto en movimiento por ejemplo, la espiral de Arquímedes (Sastre, Rey y Boubée, 2008; Delgado, 1998) aunque no tuvieran una expresión analítica para algunas de ellas.

Aparece a la sazón la clasificación euleriana en continuas y discontinuas. Continuas eran aquellas que se representaba mediante una sola ecuación y discontinuas eran aquellas que se definían por más de una expresión algebraica o eran arbitrarias, es decir, definidas por movimientos libres de la mano o mixtas.

- Los matemáticos aceptaban por "artículo de fe", es decir sin demostración y sin duda alguna, que: "si dos expresiones analíticas coinciden en un intervalo, ellas coinciden en todas partes" (Sastre, Rey y Boubée 2008:148).

- El problema de la cuerda vibrante: se trataba de una cuerda elástica con extremos fijos que era deformada a fin de ponerla a vibrar. El problema radicaba en encontrar la función que describe la forma de la cuerda en cada instante. Dalambert (1717 - 1783), Euler (1707 - 1783) y Daniel Bernoulli (1700 -1782) abordaron la solución de este problema lo que suscitó diferencias y coincidencias entre ellos.

En 1747 Dalambert propone una solución que coincide con la solución dada por Euler un año después, sólo que Euler no la consideraba la más general. Seis años después Daniel Bernoulli propone otra solución, pero Euler y Dalambert la rechazaron puesto que se trataba de una función par y periódica, sólo que ellos llegaban a esta conclusión por que en aquel entonces se daba por sentado que si dos funciones coincidían en un intervalo entonces coincidían en todas partes. En este último hecho y en el concepto de función que se manejaba en la época se encontraba la raíz de sus diferencias: función era cualquier expresión analítica, pero Euler se da cuenta que esa definición restringía las soluciones al problema de la cuerda vibrante (dejaba por fuera las curvas arbitrarias) y decide modificarla a fin de dar lugar a estas curvas y a funciones definidas por expresiones analíticas a trozos y funciones que tenían un gráfico y no tenían una expresión analítica.

Como puede verse, se dan todas las condiciones para la siguiente variación conceptual (V_9). Euler promulga entonces su nueva definición de función, en el prefacio de su «Institutiones calculi differentialis» en 1755 (Ruiz, 1998; Delgado, 1998):

FRV: Función en términos de la relación entre variables:

> *"Si unas cantidades dependen de otras de tal modo que sufren una variación cuando estas últimas varían, entonces se dice que las primeras son funciones de las segundas; esta denominación es la más extensa y contiene en ella misma todas las maneras por las cuales una cantidad puede ser determinada por las otras. Si, por consiguiente, x designa una cantidad variable, entonces todas las otras variables que dependan de x no importa de qué manera, o que son determinadas por x, son llamadas funciones de x."*[2]

El concepto de función incluye ahora funciones definidas a trozos y funciones que, aunque tuvieran un gráfico, carecían de una expresión analítica. Sin embargo, en la práctica los matemáticos de la época pensaban en las funciones como expresiones analíticas o curvas (Sastre, Rey, Boubée, 150), más exactamente funciones continuas en la acepción de la época, o, en términos de Ruiz (130): "perfectamente determinadas, indefinidamente derivables, desarrollables por medio de una serie de Taylor, integrables y representables mediante una curva algebraica o trascendente." Se llega así a dos nociones de función: la formal, de expresión analítica (incluso expuesta, implícitamente por Cauchy en 1827 en su curso de análisis algebraico (Youschkevitch, 1976, 58), y la de correspondencia arbitraria (promulgadas por Euler y Jean Bernoulli). Sólo a finales del siglo XIX se establecerá la relación entre ambas gracias a otra evolución del concepto de función engendrada por reflexiones en torno a la ambigua noción de continuidad.

La concepción euleriana de continuidad (más exactamente de discontinuidad) no pudo sostenerse por mucho tiempo. Con el paso de los años los matemáticos fueron produciendo ejemplos de funciones que serían discontinuas en el sentido de Euler, pero podían expresarse por medio de una sola ecuación, así que serían continuas, "se trata de los casos de funciones definidas por dos expresiones analíticas diferentes en dos intervalos diferentes del dominio de la variable independiente (Euler-discontinuas) y que pueden ser representadas por una única expresión (por tanto era Euler-continua) –Por ejemplo, f(x)=-. La distinción entre funciones continuas y discontinuas lleva entonces a contradicción." (Delgado, 2003).

Esto hizo cada vez más insostenible el criterio de Euler. El desequilibrio se ha presentado nuevamente, las explicaciones de Euler ya no son suficientes, el medio (en este caso el gremio de matemáticos del momento) exige respuestas que la estructura existente no puede dar, de nuevo deben producirse cambios que respondan a demandas. Así se produce la variación conceptual V_{10}: en 1822 Fourier, a raíz de sus estudios sobre la teoría del calor, conjetura sin demostrarlo, que es posible representar, mediante una serie trigonométrica, cualquier función discontinua en el sentido de Euler (mixta) (Youschkevitch, 1976). Cuando Fourier afirma que esto es cierto para todas las funciones el término función tiene su más general interpretación para ese momento:

FVA: Función como valores arbitrarios:

> *"In general, the function f(x) represents a succession of values or ordinates each of which is arbitrary. An infinity of values being given to the abscissa x, there are an equal number of ordinates f(x). All have actual numerical values, either positive or negative or null. We do not suppose these ordinates to be subject to a common law; they succeed each other in any manner whatever, and each of them is given as if it were a single quantity"* (D. Rüthing, 1984:73) (Grattan-Guinnes, 1984:199).

Esta definición amplía el rango de funciones (superando el rango de funciones representable mediante series de Taylor) considerando ahora también aquellas que tuvieran puntos en los que no fueran derivables o en que no fueran continuas, es decir, la definición de función exige ahora la inclusión de cualquier correspondencia arbitraria.

Los trabajos de Fourier le dieron importancia nuevamente a la expresión analítica y en consecuencia a la definición del concepto de función, pero carecían del rigor necesario en la escritura matemática propia de la época, Dirichlet asume entonces el trabajo de reescribir la producción de Fourier encontrando que su conjetura sobre la representación de cualquier función como una serie era falsa. La situación está dada, el sistema presenta un desequilibrio, obliga al sujeto, en este caso Dirichlet, a buscar nuevamente el equilibrio. En 1829 intentando encontrar las condiciones para que fuera posible la afirmación de Fourier, dio lugar a la variación conceptual V_{11}: definió función de modo que -su dominio esté definido sobre un intervalo determinado. –exista una correspondencia cuya regla de asociación sea arbitraria:

FCA: Función como correspondencia arbitraria: *"y es una función de la variable x, definida en el intervalo* $a<x<b$*, si para todo valor de la variable x en ese intervalo, le corresponde un valor determinado de la variable y. Además, es irrelevante como se establece esa correspondencia."* (N. Luzin, 1940: 314-334)

Con esta definición se da un salto doble: de la expresión analítica (o curva) a cualquier representación o, sencillamente a la no representación (ya son admitidas como funciones incluso algunas que no poseen expresión analítica y no pueden graficarse) y de considerar las funciones continuas en el sentido euleriano, como funciones discontinuas, o las discontinuas en el sentido de Euler como continuas. Se puede ilustrar este hecho con la función conocida como función de Dirichlet:

$$f(x) \begin{cases} c, \textit{ si x es racional} \\ f(x) = d, \textit{ si x es irracional} \end{cases}$$

A pesar de no poseer una expresión analítica y no tener una gráfica asociada, es una función de acuerdo con la definición propuesta por Dirichlet. Además, no es continua en ningún punto. Gracias a estos trabajos el concepto de función inicia un proceso de separación de la representación analítica con la cual había estado tan ligada hasta el momento, que "No se especifica su dominio ni su regla de correspondencia, es una totalidad que englobada en una única expresión analítica contiene intrínsecamente los diferentes caracteres de paridad o imparidad, periodicidad, continuidad, etc." (Delgado, 1998:208).

En particular el ejemplo citado arriba exige un concepto de función mucho más general que incluya como funciones algunas "con una infinidad de valores extremos y discontinuidades y/o de valores infinitos en un intervalo finito,…" (Grattan-Guinness, 1984, p.164-165 citado por Delgado, p.208), es decir, el concepto de función se ha independizado de la expresión analítica y ha pasado a constituirse en lo que se podría llamar un "apareamiento arbitrario". Dirichlet logra determinar intervalos de convergencia para las series de Fourier lo que amplió el espectro de funciones representables mediante dichas series, incluyendo funciones que podían no ser diferenciables en muchos puntos o ser discontinuas en otros tantos (Delgado, 1998) debido a esto Dirichlet propone otra definición en 1837 que respondía a estas nuevas exigencias (variación conceptual V_{12}):

e-ISSN: 2619-4791 • doi: 10.25100/praxis_educacion.v0i1.6466

FRR: Función como regla de relación(Boyer),:

> *"Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es función de la variable independiente x."* (1986:687 citado por Delgado, 1998:208)

Esta definición no es más que la ratificación de que ya estaban dadas las condiciones para expresar el concepto de función como correspondencia independizándolo de la expresión analítica y del apoyo geométrico tan necesario durante su constitución. La "desgeometrización" se toma al concepto de función, los métodos del análisis de Cauchy no requieren ya de la intuición geométrica ni de la expresión analítica (algebraica o trascendente) (Ruiz, 1998; Grattan-Guinnes, 1984). Contemporáneamente a esta definición, en diversos artículos, aparecieron otras definiciones de función que mostraban cómo, en otros contextos también el concepto de función era exigido en términos de asociación arbitraria, pero conservando la posibilidad de expresar una regla de asociación. Por su parte, Riemann (alrededor de 1858), se adhirió a la concepción de Dirichlet (Grattan-Guinnes, 1984:171,181 y 207), las necesidades de sus investigaciones así lo clamaban: se dedicó a buscar funciones con infinitas discontinuidades pero con una integral definible y/o una serie trigonométrica convergente. En cuanto a Weierstrass y sus seguidores, dedicaron sus esfuerzos a "la construcción de expresiones analíticas que definan funciones con infinitas oscilaciones y discontinuidades en un intervalo finito…" (Grattan-Guinnes, 1984:181), estos trabajos también se apoyaron en esta definición dado su carácter general.

Puede verse en las dos últimas definiciones propuestas por Dirichlet, cómo la primera hace referencia a la asociación arbitraria ("*…es irrelevante como se establece esa correspondencia."*) y la segunda a una regla de asociación ("*…hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es función de la variable independiente x."*) es decir, con cada una busca responder a una necesidad imperante en un momento determinado. Pero las circunstancias que configuraron el correspondiente desequilibrio no desaparecieron (el trabajo de buscar condiciones para la representación en series de Fourier para la primera y el trabajo de asimilación de ejemplos de funciones extrañas para la segunda) así que pareciera presentarse una dicotomía.

Esta nueva situación de desequilibrio no se prolongó por mucho tiempo. En 1870, ratificando el carácter central adquirido por el concepto de función, y respondiendo a la necesidad, ya ineludible, de responder simultáneamente a dos exigencias, la asociación arbitraria y la regla de asociación, Hermann Hankel en "Untersuchunger über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen" (p.49) formuló la siguiente definición que puede considerarse como variación conceptual V_{13}:

FAA-RA: Función como asociación arbitraria y como regla de asociación:

> "On dit que y est fonction de x si a chaque valeur de x d ún certain intervalle correspond une valeur bien définie de y sans que cela exige pour autant que y soit définie sur tout l íntervalle par la même loi en fonction de x, ni même que y soit définie par une expression mathématique explicite de x" (H. Hankel, 1870. Citado por Youschkevitch, 1976, p.61).

Esta definición, aunque de manera implícita, cubre las dos opciones consideradas por Dirichlet, reconciliándolas en una sola, gracias al proceso generado por la evolución del concepto de continuidad. No exige que *y* esté definida por la misma ley en todo el intervalo, ni que sea definida por una expresión matemática explícita en *x*. Pero la manera en que se expresa la definición tampoco rechaza que pueda darse una misma ley o que exista una expresión matemática. Sin embargo es claro que se apoya totalmente en la definición de Dirichlet como de hecho sucederá a lo largo del siglo XX hasta la actualidad, aunque algunas definiciones mantienen el carácter de correspondencia unívoca (Ruiz, 1998) y otras evolucionan a la idea de pares ordenados como se verá más adelante.

La noción general de función presentada por Dirichlet es pues la base para posteriores definiciones que, en realidad, no la modifican de manera significativa y continúan teniendo el carácter de función estrictamente numérica. Sin embargo no se puede dejar de mencionar que esta noción ha sido sometida a cuestionamientos más filosóficos que surgidos de desequilibrios que pudieran hacer de la definición algo insuficiente. En particular se prestó a discusión la frase de la definición de 1829 que hace referencia a la no importancia de la regla de correspondencia: "*…es irrelevante como se establece esa correspondencia."* El debate al respecto se dio en torno a un axioma formulado por Zermelo en 1904 (axiom of choice) y tomó forma en un intercambio de cartas entre Baire, Borel, Hadamard y Lebesgue en 1905 (Para mayores detalles ver Monna, 1972/73:57-84 y Moore, 1982). La discusión giraba en torno a si la definición de un objeto matemático, ya fuera un número o una función, legitimaba su existencia. Para Lebesgue la definición de Dirichlet era demasiado amplia, para

Baire y Borel carecía de significado y para Hadamard era adecuada. Baire, Borel y Lebesgue eran partidarios de explicitar una ley definitiva de correspondencia en la definición de una función.

Por su parte Hadamard, consideraba que la exigencia de una ley para determinar una función era un retroceso hacia el siglo XVIII, cuando el concepto de función estaba fuertemente ligado a la expresión analítica. Este debate no es más que una ilustración de debates más amplios entre partidarios de unas u otras filosofías de las matemáticas. De hecho el problema nunca fue resuelto pero, seguramente dio lugar al crecimiento de otros conceptos más profundos en algunas ramas de las matemáticas (Kleiner, 1989).

En los años siguientes las matemáticas crecieron ya independientes, en algunos casos, de la física y sus motivaciones y en otros muy de la mano de sus problemas. Muchas ramas profundizaron en sus avances desde sus propios intereses; estos avances se reflejaron en evoluciones del concepto de función promovidas desde necesidades diferentes y, por supuesto, generando variaciones conceptuales diferentes. Llaman la atención especialmente dos de ellas por la trascendencia que tienen para la educación matemática y la problemática que involucran en el aprendizaje del concepto de función, más que por representar una gran diferenciación respecto de la definición de Dirichlet.

La primera de ellas es promovida por ramas de las matemáticas cuyas necesidades no se ven satisfechas por funciones numéricas definidas sobre intervalos de reales, si no que exigen del concepto una mayor generalidad que no restrinja su utilización. Se trata de aquellas ramas para las que se hace necesario definir funciones de funciones, es decir, constituir con funciones el dominio sobre el que se definirán otras funciones, esta variación conceptual, identificada en este estudio como V_{14}, puede describirse desde los factores que la promovieron (no necesariamente en orden cronológico puesto que muchos de esos desarrollos se dieron paralelos aunque independientes) por cuanto no se ve reflejada en una definición en particular:

Un primer desarrollo que propulsó esta variación conceptual corresponde a los espacios de Hilbert. Es de nuestro interés que este tipo de estudio requiere trabajar con clases de equivalencias de funciones y no con funciones particulares, es decir, el concepto de función ya es exigido como un objeto, no como proceso y, adicionalmente, las funciones a que se hace referencia no son numéricas ni responden a la regla de asociación o a la expresión analítica, es decir, no pueden ser caracterizadas como funciones ni en el sentido de Euler ni en el de Dirichlet, aunque pueden ser tratadas como tales; en términos de Davis & Hersh (1981):

> *"…involve a further evolution of the concept of function. For an element in L_2 is not a function, either in Euler´s sense of an analytic expression, or in Dirichlet´s sense of a rule or mapping associating one set of numbers with another. It is function-like in the sense that it can be subjected to certain operations normally applied to functions (adding, multiplying, integrating). But since it is regarded as unchanged if its values are altered on an arbitrary set of measure zero, it is certainly not just a rule assigning values at each point in its domain."* (L_2= {*$f(x)$=$f^2(x)$ is Lebesgue-integrable*}). (1981)

Sobre 1887 Volterra (p.299) define un "funcional": funciones con dominio en un conjunto de funciones y codominio en intervalos de números reales o complejos. Las funciones ya no sólo son las asignaciones, ahora son también a quienes se les asigna, ahora constituyen objetos sobre los cuales se actúa.

Por los lados de la física, alrededor de la década de los 30 (siglo XX), ciertas situaciones idealizadas producían como soluciones lo que parecían ser funciones pero que no se correspondían con ninguna de las funciones admitidas como tales en la concepción vigente en el momento: se portaban como la derivada de funciones discontinuas (recuérdese que una condición necesaria, aunque no suficiente, para la derivabilidad es la continuidad). Por la misma época el problema que ocupaba a los físicos era explicar el comportamiento de los átomos y de los electrones, pero la física clásica no era suficiente, se hacía necesaria una síntesis de la física clásica y la física relativista. En 1927, el físico británico Paul Adrien Maurice Dirac introdujo la función delta o de impulso (δ) en su artículo "The physical interpretation of the quantum mechanics", en el que demostraba la equivalencia entre las formulaciones de la mecánica cuántica de Heisenberg y Schrödinger. Pero la "función delta de Dirac" en realidad no lo era en el sentido del cálculo diferencial e integral, pues podía probarse que no existía como tal aunque pudiera calcularse la integral mediante la que se definía:

$$f(a)=\int_{\mathrm{R}} \delta(x-a)\, f(x)\, \mathrm{d}x$$

e-ISSN: 2619-4791 • doi: 10.25100/praxis_educacion.v0i1.6466

Estas dos últimas situaciones físicas, contribuyeron enormemente en la variación conceptual V_{14}, pues generaron la necesidad de admitir como funciones nuevos objetos que no lo eran desde la óptica de la teoría vigente. Como respuesta a esta necesidad se crea la teoría de distribuciones por Sergéi Sóbolev en 1935; en ella se definen funciones que asignan a cada función de un espacio de funciones diferenciables, una distribución expresada como una integral impropia. Una función de distribución o función generalizada es una integral y corresponde a una función lineal continua.

Todas las funciones convencionales pueden considerarse como distribuciones. También las nociones de espacio métrico y espacio topológico, desarrolladas en las dos primeras décadas del siglo, exigieron la utilización de funciones como operadores lineales entre dichos espacios, es decir, funciones de funciones. En estos desarrollos propulsores de la variación conceptual V_{14}, la gama de funciones se amplió a un nuevo nivel: se construyeron funciones de funciones, la regla de asociación es ahora alguna operación que se hace sobre funciones, para obtener otra función. ¡No resulta fácil, mediante la definición de Dirichlet, determinar si se trata o no de una función! Ya esa definición se torna insuficiente, se ha generado una necesidad que no se satisface con las herramientas disponibles y exige una variante en el desarrollo, en este caso un nivel superior en el concepto de función que engloba los anteriores.

La segunda de estas variaciones conceptuales, V_{15}, se va produciendo en la medida que finaliza el siglo XIX y avanza el siglo XX, es decir, en la medida que toma fuerza la teoría de conjuntos. Esta teoría se empieza a gestar entre 1873 y 1897 cuando el matemático alemán Georg Cantor (1845-1918) plantea a su amigo Richard Dedekind el problema relativo a la posibilidad de hacer corresponder biunívocamente los números naturales con el conjunto de todos los números reales del continuo.

Cantor construyó una demostración de esta imposibilidad, es decir, demostró la no numerabilidad de los reales. Pero este hecho no hizo más que incentivar otras cuestiones de este tipo en la mente de Cantor: ¿sería posible establecer una correspondencia entre una superficie y una línea recta de tal manera que a cada punto de la superficie correspondiera un solo punto de la línea y recíprocamente? le preguntó a Dedekind a comienzos de 1874 (Grattan-Guinness, 1984). Para los matemáticos de la época la respuesta era obvia e inmediata: “No”. Sin embargo en 1877, Cantor construye una correspondencia biunívoca entre los puntos de cualquier espacio p-dimensional y los del continuo lineal. De allí en adelante Cantor empieza a constituir la teoría de conjuntos lineales de puntos y a introducir los números transfinitos, necesarios para su teoría general de conjuntos infinitos (para más detalles, ver Grattan-Guinness, 1984, p.235-282).

Los trabajos de Cantor se tradujeron rápidamente al italiano y al francés, de modo que sus ideas tuvieron pronta y amplia difusión obteniendo el valor que se merecían (y por supuesto algunos detractores). Años después, en 1903, Rusell demuestra inconsistencias en la definición intuitiva de conjunto propuesta por Cantor: "Por un conjunto entendemos una colección cualquiera M de objetos definidos y distintos de nuestra percepción o de nuestro pensamiento (a los cuales llamaremos los elementos de M) en un todo" ("contribuciones a la fundamentación de la teoría de conjuntos transfinita" p. 282, citada por Grattan-Guinness, 1984, p. 266), a través de la famosa paradoja que plantea por carta a su amigo Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848 - 1925); en ella pregunta si el conjunto de los conjuntos que no se contienen a sí mismos forma parte de sí mismo (conocido también como la paradoja del barbero); la paradoja consiste en que si ese conjunto no se contiene a sí mismo entonces hace parte de él mismo por la definición del conjunto (contradicción), y si se contiene a sí mismo entonces no puede estar en él mismo (de nuevo, contradicción).

Queda en evidencia que la definición de Cantor es ingenua por su carácter circular y debe reelaborarse, lo que da inicio al proceso de reconstrucción de la ya famosa teoría. Rusell da solución radical a la cuestión con su "teoría de tipos" en la que propone diferentes niveles de conceptos con la condición de que ningún concepto puede aplicarse a conceptos de nivel igual o superior. En 1908 Ernst Zermelo (1871-1953) construyó, por primera vez en la historia, la axiomatización de la teoría de conjuntos mediante siete axiomas (el de extensionalidad, el de conjuntos elementales, el de separación, el del conjunto-potencia, el de unión, el de elección y el de infinitud) otorgándole precisión, pero restringiéndola para evitar las paradojas ya identificadas. Más adelante esta axiomática fue depurada por Fraenkel (1922), Skolem (1923), von Newman (1925) y otros hasta llegar a la teoría de conjuntos actual. La axiomática construida exige una definición de función como una relación entre elementos de dos conjuntos (pueden ser conjuntos de conjuntos o de otros objetos) expresada o no, mediante pares ordenados, que permita formular conceptos, como los axiomas de elección o la buena ordenación de un conjunto, el axioma de reemplazamiento, el concepto de ordinal y otros, en términos propios a la axiomática propuesta.

Lo anterior pone en boga y fortalece la acepción de una definición de función desde un punto de vista estrictamente conjuntista, la teoría axiomática de conjuntos tomó tanta fuerza que la noción de función inmersa en ella llegó a considerarse la definición última del concepto; definiciones de función expresadas como relaciones entre conjuntos o como pares ordenados nacen de allí y se consolidan como la variación conceptual V_{15}, a través de la definición formulada por el grupo Bourbaki en 1939:

FCRF: Función como relación funcional (Bottazzini, 1986, p. 7 citado por Kleiner, 1989):

> *"Let E and F be two sets, which may or may not be distinct. A relation between a variable element x of E and a variable element y of F is called a functional relation in y if, for all x∈E, there exists a unique y∈F which is in the given relation with x. We give the name of function to the operation which in this way associates with every element x∈E the element y∈F which is in the given relation with x; y is said to be the value of the function at the element x, and the function is said to be determined by the given functional relation. Two equivalent functional relations determine the same function." (*1989: 299)

Según Kleiner (1989), el grupo Bourbaki también formuló esta definición como un subconjunto del producto cartesiano ExF, es decir, proponen la definición de función como un conjunto de pares ordenados (FCPO: Función como par ordenado).

Nótese cómo en esta definición los Bourbaki llaman relación funcional a la relación entre un elemento variable *x* de E con un único elemento variable *y* de F y llaman función a la operación que permite la asociación entre *x* e *y*. Se trata de la primera definición como relación entre elementos de conjuntos; anteriormente las definiciones se formulaban respecto de expresiones algebraicas, de cantidades variables que dependían unas de otras, de asociaciones entre valores numéricos, ya sea tomados de intervalos o de cantidades variables, pero no respecto de elementos de conjuntos; es pues la primera definición conjuntista de función de gran influencia desde el momento de su formulación dado el gran trabajo presentado por este grupo y que, aunque nunca fue su finalidad, influyó en determinaciones pedagógicas que afectaron desde luego, la noción de función que se ha presentado en numerosos cursos universitarios y de bachillerato:

> "…Su nombre fue asociado igualmente al fenómeno de las llamadas "matemáticas modernas", con la modificación durante los años sesenta de los programas de matemáticas de la enseñanza secundaria introduciendo "los conjuntos", y las nociones y vocabulario de la matemática "estructural". Aunque ninguno de ellos intervino directamente en tales actividades y quien más se aproximó -Dieudonné-rechazó toda relación, no puede negarse que muchos de los patrocinadores franceses del movimiento eran partidarios entusiastas de Bourbaki formados en su lectura." (http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/mateospetsuak/Bourbaki3.asp)

Godement, miembro del grupo Bourbaki, presenta en 1971 una definición de función como terna, es decir, una definición aún más estructural (Godement, 1971, 63-64. Citado por Ruiz, 1998):

FCT: Función como terna: *"se llama función a la terna f=(G,X,Y), en donde G,X,Y son conjuntos que verifican las condiciones siguientes:*

1. $G \subset X x Y$
2. Para todo $x \in X$, existe un y sólo un $y \in Y$, tal que, $(x,y) \in G$, G es la gráfica de la función f.

El único elemento y de Y tal que $(x,y) \in G$ se llama valor de la función f en x, y se utiliza para designarlo y=f(x). Es evidente entonces que la gráfica G es el conjunto de pares de la forma (x,f(x)) donde $x \in X$, lo que está de acuerdo con la idea intuitiva de función.
$A \subset X$ se le denomina conjunto de partida de f y a Y conjunto de llegada de f." (1998, p.134).

Apostol, en su edición de 1973, es una buena muestra de libro de texto cuya utilización aún perdura y en el cual es clara la influencia de la definición conjuntista expresada como pares ordenados:

FCPO: Función como pares ordenados:
"*una función f es un conjunto de pares ordenados (x,y) ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento"*
(Apostol, 1973:65).

e-ISSN: 2619-4791 • doi: 10.25100/praxis_educacion.v0i1.6466

En textos actuales se encuentran variaciones de estas mismas definiciones, pero lo común en todas es la función como relación, como terna o como conjunto de pares ordenados.

Es importante, después de este extenso recorrido por la evolución del concepto de función, no dejar de tener en cuenta que en las definiciones actuales ya nada queda de cantidades que fluyen produciendo magnitudes variables, ni de puntos que se mueven sobre curvas, ni la idea de variabilidad. La abstracción definitivamente se tomó a la definición y, esto, muy seguramente la ha alejado de la comprensión del aprendiz.

Referencias bibliográficas

Bottazzini, U. (1986) *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass.* New York. Springer-Verlag.

Davis, P. J, Hersh, R., & Machisotto, E. (1981) *The mathematical experience.* Boston: Birkhäuser.

Delgado, C. A. (1998). El modelo de Toulmin y la evolución del concepto de continuo en los clásicos griegos. *Matemáticas: enseñanza Universitaria,* XI (1), p. 91-127.

Delgado, C. A. *(1998). Estudio microgenético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de límite y continuidad en universitarios de primer curso.* Tesis Doctoral. Universitad Autónoma de Barcelona. Departamento de Didáctica de las Matemàtiques i de les Ciènces Experimentals. España.

Devlin, K. (1993). *The Joy of Sets. Fundamentals of contemporary set theory.* New York: Springer-Verlag.

Grattan-Guinnes I, (1984). *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann.* Madrid: Alianza editorial.

Halmos, P. (1974). *Naive Set Theory.* New York: Springer-Verlag.

Kleiner I. (1989). Evolución del concepto de función: un breve repaso. *The College Mathematics Journal*, 20(4), p. 282-300.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Oxford University: Press.

Luzin, N. (1995). *"Function", The Great Soviet Encyclopedia*, v. 59 (ca. 1940), pp 314-334.

Monna, A. F. (1972-1973). "The concept of function in the 19th and 20th centuries, in particular with regard to the discussion between Baire, Borel and Lebesgue". *Arch. Hist. Ex. Sci.* 9, pp.57-84.

Moore, G. H. (1982). *Zermelo´s axiom of choice: its origins, development and influence.* New York: Springer-Verlag.

Rüthing, D. (1984) "Some Definitions of the Concept of Function from Joh. Bernoulli to N. Bourbaki", *Math. Intelligencer.* 6(4), pp.72-77.

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico.* España: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Sastre-Vázquez, P., Rey, G., y Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la Historia. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática.* (16), pp.141 – 155.

Sierpinska, A. (1992). Sobre la comprensión del concepto de función. *The concept of function: some aspects of epistemology and pedagogy, MAA notes*, 25, pp. 25-28. *Mathematical association of America, Washington, DC.*

Suppes, P. (1982). *Axiomatic Set Theory. New York: Dover.*

Youschkevitch, A. P. (1976). The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. *Archive for History of Exact Sciences,* 16(1), pp. 37-85.

e-ISSN: 2619-4791 • doi: 10.25100/praxis_educacion.v0i1.6466

Notas

[1] Mg. en Educación con énfasis en Matemática, Universidad del Valle, Docente Colegio Jefferson, Yumbo, Colombia. Correo electrónico: fporras@jefferson.edu.co ORCID: 0000-0001-8262-7488

[2] Por esta misma época, Lagrange, en respuesta las duras críticas del obispo George Berkeley (ver Delgado, 1998:194) publica en 1797 Théorie des functions analytiques (1797, Euvres, 9). Allí consigna una definición de función muy similar a la propuesta por Euler.