

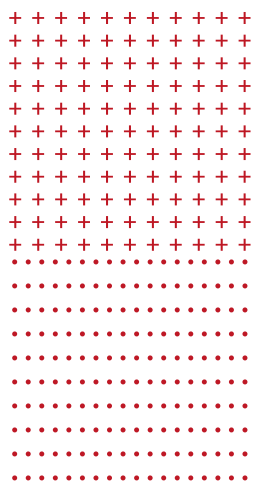


LA GEOMETRÍA EN EL MUNDO MODERNO

Geometry in the modern world

...

A geometria no mondo moderno



Por:

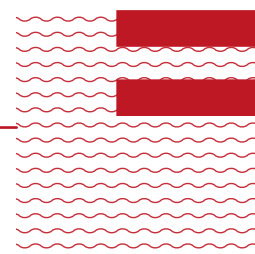
Luis Moreno Armella¹

Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México.

lmorenoarmella@gmail.com

 [0000-0001-5055-5782](https://orcid.org/0000-0001-5055-5782)

Recepción: 31/01/2019 • **Aprobación:** 22/03/2019



Resumen: Este trabajo pretende trazar un camino a lo largo del tiempo histórico para mostrar cómo la capacidad de simbolización del ser humano fue crucial para abrir camino a la creatividad matemática. La capacidad de simbolización está tan enraizada en nuestra naturaleza que distintas culturas, entre ellas la griega, han sentido los productos de dicha capacidad tan tangibles como los objetos materiales. Así fue durante muchos siglos hasta que a mediados del XIX, el pensamiento matemático sufrió una profunda transformación que puso en el centro del escenario que, aquello que se simbolizaba no era la materia externa sino básicamente *la acción humana a partir de sus percepciones*. Entonces, las matemáticas dejaron de ser vistas como un espejo del mundo material. Estas transformaciones epistémicas gravitan silenciosamente en los territorios de la educación matemática, y se hace por ello necesario sacarlas a la luz para que iluminen los senderos educativos.

Palabras clave: Geometría; Historia; Simbolización; Geometría Dinámica; Geogebra.

Abstract: This work aims to trace a path through historical time to show how the capacity to symbolize of the human being was crucial to open the way to mathematical creativity. The capacity for symbolization is so rooted in our nature that different cultures, including the Greek, have felt the products of such capacity as tangible as material objects. This was the case for many centuries until the mid-nineteenth century, mathematical thought underwent a profound transformation that put at the center of the stage that what was symbolized was not external matter but basically human action from its perceptions. Then, mathematics ceased to be seen as a mirror of the material world. These epistemic transformations gravitate silently in the territories of mathematical education, and it is therefore necessary to bring them to light in order to illuminate the educational paths.

Keywords: Geometry; History; Symbolization; Dynamic geometry; Geogebra.

Resumo: Este trabalho pretende apresentar um caminho ao longo do tempo histórico para mostrar como a capacidade de simbolização esta tão enraizada na nossa natureza que diferentes culturas, entre elas a grega, tem sentido os produtos dessa capacidade tão tangível como os objetos materiais. Assim foi durante muitos séculos ate que a meados do XIX, o pensamento matemático sofreu uma profunda transformação que colocou no centro do cenário que aquilo que foi simbolizado não era a matéria externa senão basicamente a



ação humana partindo das suas percepções. Então, as matemáticas deixaram de ser olhadas como um espelho do mundo material. Estas transformações epistémicas gritavam silenciosamente nos territórios da educação matemática, e se faz por isso necessário traze-las á luz para que iluminem os sendeiros educativos.

Palavras chave: Geometria; História; Simbolização; Geometria Dinâmica; Geogebra.

Procedencia: Este artículo no recibió financiación.



Este trabajo está bajo la licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional.

¿Cómo citar este artículo? / How to quote this article?

Moreno Armella, L. (2018). La geometría en el mundo moderno. *Praxis, Educación y Pedagogía*, (2), 8-35. Doi: [10.25100/praxis_educacion.v0i2.7800](https://doi.org/10.25100/praxis_educacion.v0i2.7800)

La sustancia simbólica del mundo humano

Inspirado en el célebre pintor belga René Magritte, un profesor de matemáticas llevó un día al salón de clases una imagen fotográfica que proyectó desde su computadora. Los estudiantes leyeron perplejos lo que se leía debajo de la fotografía de un hermoso instrumento de escritura: *esto no es un bolígrafo*. Para ellos era evidente que sí lo era e interrogaron al profesor sobre el por qué de aquella declaración. Entonces, el profesor respondió: *si fuese un bolígrafo, cualquiera de ustedes podría escribir con él*.

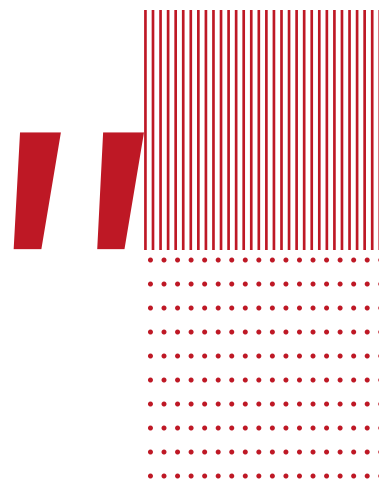
Una anécdota tan simple sirve para introducir *el problema de la representación* en matemáticas; hay que hacer, sin embargo, una distinción entre la representación de un bolígrafo y la representación de un triángulo. La fotografía del bolígrafo, por ejemplo, es una representación de un objeto que existía antes de ser fotografiado. En lugar de la fotografía podríamos tener el bolígrafo en nuestras manos. Es como en el caso del mapa de una región. El mapa es una representación de un territorio que ya existía antes de que a alguien se le ocurriese producir un mapa de aquella región. La existencia del territorio o del bolígrafo *precede* a la elaboración de las representaciones que hagamos de ellos.

Pero, ¿qué ocurre con la representación de un triángulo? Imaginemos que no tenemos *ninguna* representación de un triángulo. Entonces, ¿cómo podríamos hablar de *alguna propiedad* del triángulo si no hay una representación del

mismo? Lo que podemos decir de los triángulos solo lo podemos decir a través de alguna representación. Los triángulos, como cualquier otro objeto matemático, son objetos conceptuales, no materiales. Son *ideas* que se van decantando hasta quedar plasmadas en alguna representación. Aclaremos que esas ideas no nacen en las profundidades de nuestro cerebro, sino que están fuertemente atadas a las experiencias que sobre la noción de *forma* adquirimos en nuestra vida cotidiana. Las formas son inseparables de los cuerpos materiales que están a nuestro alrededor. La idea de forma, ahora separada de un cuerpo material, es una *abstracción*.

En principio, Cuando hablamos de una recta o mejor, de un segmento de recta, tenemos mucha información acumulada a través de nuestra experiencia en el mundo. Sabemos que, si cruzamos un campo siguiendo una trayectoria diagonal, el camino elegido será más corto. Porque es un segmento de recta. Si tensamos una cuerda entre nuestras manos tenemos una experiencia directa de lo que es un segmento de recta. A partir de allí, nos resulta *natural* que dos puntos determinen una recta, ¡solo hay una manera de tensar una cuerda entre nuestras manos! Entonces, cuando estudiamos geometría, aprendemos (de nuevo) que un segmento de recta define la distancia más corta entre dos puntos. Ese segmento de recta dibujado sobre un plano (pizarrón o pantalla), *representa* la idea que hemos extraído del mundo de nuestras experiencias. Experiencias visuales y experiencias extraídas de nuestras acciones sobre el mundo humano en el que nos desarrollamos. Una representación de la recta es como una *encarnación* de la idea de recta. Igual para la idea de triángulo, circunferencia, etc. Representar una idea matemática, un concepto matemático, es una manera de darle existencia material a dicho concepto. También podríamos representar una recta mediante una ecuación cartesiana: $y=mx+b$. No hay un número determinado, fijo, de representaciones que puede tener un concepto matemático pues las experiencias que nos llevan a dicho concepto son variopintas. Pero cada representación posible, da cuerpo a la idea que representamos.

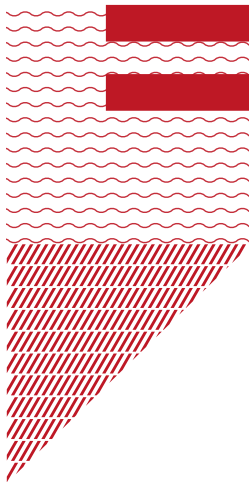
La capacidad de los seres humanos para hacer que algo tome el lugar de otra cosa es lo que ha permitido crear una versión simbólica del mundo tangible donde se desarrolla la vida. Tenemos una Corte Suprema de Justicia, una Constitución de la República, un reglamento de tránsito etc. La Corte pueden perder su edificio en un incendio, pero no sufre mella alguna puesto que es una construcción simbólica y las personas creemos en ella, en su existencia, tanto como creemos en un árbol de mango en el patio de nuestra casa. El mundo humano tiene esa doble naturaleza: material y simbólico. Hay una profunda simbiosis entre la dimensión material y la simbólica. A lo largo de nuestra presencia en el



planeta, los seres humanos hemos ido *incrustando* en representaciones simbólicas nuestra experiencia y acciones. Y esas representaciones, a partir de cierto momento, adquieren una independencia (relativa) de sus orígenes materiales. Ese hecho es de la mayor importancia y gracias a él, nos movemos de lo material a lo simbólico y viceversa como en un continuo vaivén.

La naturaleza de los entes matemáticos

Las representaciones simbólicas de los entes matemáticos aparecen como respuesta a ese primer nivel de abstracción que hemos descrito previamente. Una abstracción que se encuentra dinamizada, en primer lugar, por el encuentro con objetos materiales de nuestro entorno inmediato y por las acciones que tienen lugar sobre estos objetos.



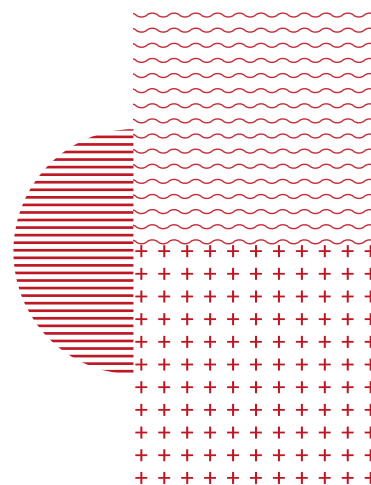
Reiteremos que, a partir de experiencias muy básicas, como tensar una cuerda o dibujar una circunferencia siguiendo el borde de un disco compacto llegamos a entender que en efecto, dos puntos determinan una recta, que la forma de un disco compacto es trasladable a la construcción con un compás sobre el papel, que todos los ángulos rectos son iguales pues basta superponer uno sobre el otro para convencernos. Estos hechos, que constituyen postulados de la geometría euclidiana, son aceptables como hechos evidentes por sí mismos, son verdaderos pues coinciden plenamente con nuestro sentido común, con nuestra comprensión intuitiva del mundo que nos rodea. A partir de esas proposiciones empezamos a enhebrar uno tras otro los teoremas de los Elementos. Van emergiendo resultados que ya no son tan

evidentes por sí mismos, como es el caso con el teorema de Pitágoras, o que la bisectriz interior de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto al ángulo en partes proporcionales a los otros dos lados. Euclides suministró así una organización global a todos esos teoremas que habían sido cocinados a fuego lento durante un largo tiempo por todos los geómetras que le precedieron. El sistema euclidiano partía de la intuición y continuaba por los senderos de la deducción lógica, revelando lo que no se veía a simple vista sino con los ojos de la racionalidad y mediado por las representaciones simbólicas propias de la geometría. Esa estructura híbrida compuesta de intuiciones, experiencias sensibles y procesos deductivos se erigió en la norma del proceder matemático ininterrumpidamente hasta el siglo XIX. Como un péndulo, ha oscilado siempre entre dos extremos: de la intuición a la deducción y de allí a la intuición. Aún los resultados que parecían sobre el papel alejados de la intuición resultaron de altísimo valor a la hora de aplicarlos a situaciones del espacio físico. Todo esto resulta a primera vista sorprendente. ¿Cómo es posible que siguiendo el rastro

a esas representaciones simbólicas lleguemos a adquirir conocimiento sobre una realidad de la cual no tenemos una experiencia directa?

Por ejemplo, ¿a qué distancia de la costa se encuentra el barco que divisamos a lo lejos? ¿Qué altura tiene esta pirámide? ¿A qué distancia se halla la luna? Pero la sorpresa puede disminuir (o tornarse aún más intensa) si pensamos detenidamente en el proceso de abstracción que ha generado ese primer nivel de representación. En efecto, nuestra manera de conocer puede definirse como *híbrida*: traslada al nivel simbólico experiencias venidas del mundo material y después, sumergida en el mundo simbólico, profundiza en hechos y propiedades de aquellas representaciones para luego regresar con los nuevos instrumentos simbólicos a explorar a un *segundo nivel* el mundo de nuestras originales percepciones. Es entonces cuando nuestros antepasados pudieron calcular la distancia de la tierra a la luna y encontraron con un grado de aproximación muy fino, el radio de la tierra. Mas adelante, en manos de Newton, surge la explicación geométrico-dinámica de las órbitas elípticas que siguen los planetas en su viaje alrededor del sol. Newton había enriquecido la geometría al incorporar el movimiento como una de las dimensiones de la descripción, antes exclusivamente euclidiana.

Es difícil exagerar el impacto tan profundo que tuvo la obra de Newton. A ojos de sus contemporáneos, era un hecho indiscutible que las elaboraciones simbólicas (hasta ese momento) revelaban la naturaleza íntima del mundo material. Había a sus ojos, una correspondencia exacta entre el mundo material y las representaciones matemáticas del mismo. El mundo simbólico era esencialmente el mundo material pero con una ventaja: se podía explorar inductiva y deductivamente para ir develando sus claves. En este momento ocurre algo crucial: nos situamos en un punto decisivo, a saber, reemplazar la verificación empírica por la deducción lógica que apoyada en los postulados producen resultados verdaderos. Las matemáticas se constituían así en una especie de mano virtual que podía introducirse *debajo* de las apariencias de los fenómenos, para hallar las verdaderas causas de lo que nuestros ojos revelaban ante nosotros. En cierto modo, se seguía la tradición pitagórica de identificar el territorio con el mapa, el modelo matemático con la estructura del espacio físico. Esa convicción sobre las matemáticas como un modelo icónico del mundo no nació con Newton. La convicción de que las matemáticas eran el sustrato del mundo material tenía raíces profundas desde los tiempos de Pitágoras; era como si el universo tuviese un esqueleto simbólico.



Los triunfos se iban acumulando al aplicar el método geométrico a problemas del espacio y con ello se fortalecía la convicción sobre las matemáticas, en particular la geometría, como modelo, como sustrato simbólico del espacio. Hacia el siglo III a.C, Eratóstenes produjo un resultado espectacular con la medición del radio de la tierra. Vamos a describir someramente la estrategia seguida con ese propósito. Eratóstenes llegó a ser el director de la biblioteca de Alejandría, y fue precisamente allí donde leyó que un palo clavado verticalmente en el suelo en la lejana ciudad de Siena (hoy llamada Asuán), no proyectaba sombra alguna al mediodía del día 21 de junio. En cambio, en Alejandría, ese mismo día, sí producía sombra. Parece un dato irrelevante y sin duda es fácilmente olvidable. Sin embargo, Eratóstenes no lo olvidó.

Eratóstenes extrajo la conclusión correcta: si en Siena no había sombra y en Alejandría sí, entonces la Tierra no podía ser plana; si fuese plana y en Siena no hay sombra es porque los rayos caen perpendiculares al piso plano y así tendría que acontecer en Alejandría. Entonces se planteó el problema de averiguar el tamaño de la Tierra que debía ser esférica, como la luna y el sol. Para calcular su tamaño debería calcular su radio. Eratóstenes sabía que la distancia AS entre Alejandría y la ciudad S era de unos 800 kilómetros actuales. Podía suponer que los rayos del sol viajan por rectas paralelas y que así llegan a la Tierra, pues vienen de un punto muy alejado, el sol. Todas estas simplificaciones son parte del modelo geométrico de la situación material. Eratóstenes pudo producir un diagrama como el que ilustra la Figura 1:

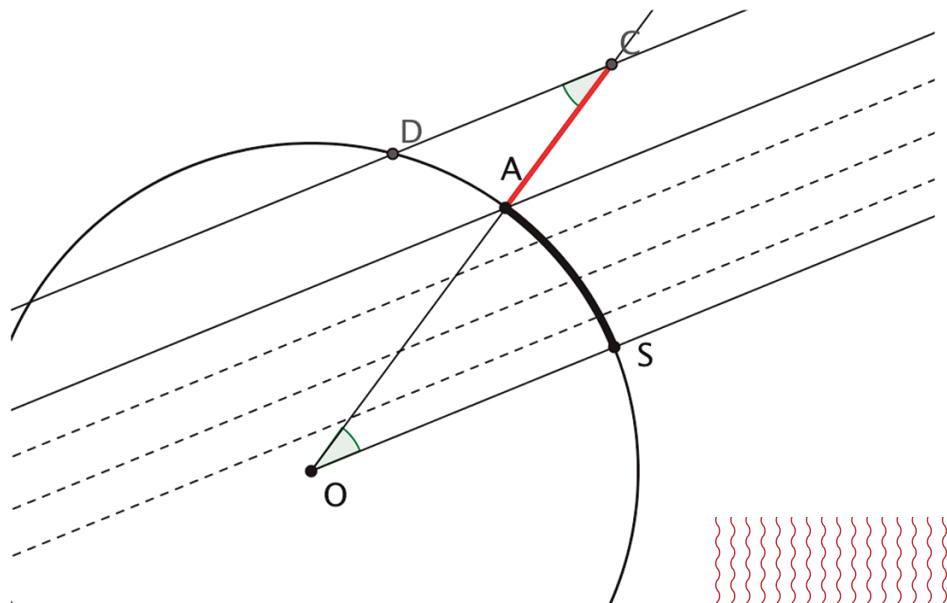
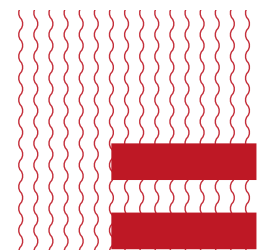


Figura 1. Modelo Geométrico de la situación material



Reiteremos, como los rayos del sol vienen de muy lejos (comparando la distancia entre el sol y la tierra con las distancias que Eratóstenes podía medir sobre la superficie del planeta), *podemos suponer* que esos rayos son paralelos entre sí. Por lo tanto, al mediodía del día en que se ve iluminado el fondo de un pozo en S, en A(lejandría) la vara AC produce la sombra AD. Estamos en A y conocemos la distancia ϑ entre las dos ciudades. Esa distancia se puede calcular como el producto cuyos factores son el radio R de la tierra y el ángulo μ que se forma entre los radios OA y OS, Esto es: $\vartheta=R\mu$. En esta expresión conocemos el valor de ϑ y el valor del ángulo μ (que resultó de un poco más que 7 grados) pues este ángulo es el que forman AC y CD. Lograr reproducir el ángulo μ de esta manera fue el toque de genio de Eratóstenes quien realizó la proeza —era como si lo hubiera extraído del centro de la Tierra—. El ángulo μ (en el centro de la tierra) y el formado entre AC y CD son iguales porque los rayos de sol son paralelos (una propiedad del modelo matemático) y estos ángulos son alternos internos entre paralelas y por lo tanto iguales (o congruentes, como también se dice). Con esta idea Eratóstenes calculó el radio y obtuvo como resultado unos 6,246 kms (él medía en *estadios*) y el cálculo actual es de 6,371 kms. Tomando en cuenta el complejo de circunstancias históricas entenderemos que es una medición más que aceptable. Este cálculo y todo el diseño de la estrategia involucrada, debió producir una profunda impresión entre los contemporáneos de Eratóstenes; era una prueba más de que la geometría euclidiana reflejaba con certeza la estructura del espacio físico, y seguía abriendo camino para *Los Elementos* de Euclides (1991).

Una primerísima incursión en los postulados de la geometría

Una convicción que atraviesa más de veinte siglos difícilmente se desvanece. Menos aún, si produce resultados tan profundos como los *Principia* de Newton (1999), y tan espectaculares como la medición de la Tierra por Eratóstenes.

Hasta aquí, el desarrollo de las matemáticas había generado una interpretación del espacio que hacía justicia al viejo dictum:

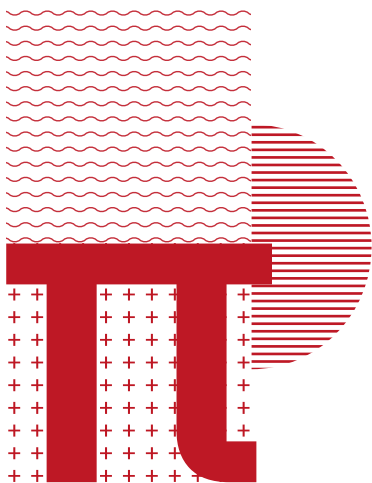
A través de las imágenes el hombre descubre el universo y su necesidad de organizarlo. La geometría euclidiana era la cristalización de la puesta en correspondencia entre la experiencia sensorio-motriz del ser humano y su *traducción*, si así puede decirse, al nivel de la organización de la geometría. El ser humano percibe las formas y su disposición en el espacio; las maneras como las cosas cambian y se *transforman*, es decir,

cómo cambian sus formas. Esto es parte de la experiencia que se traduce al nivel simbólico de las figuras geométricas. En un inicio, las propiedades (geométricas) de estas formas materiales producen proposiciones más o menos evidentes desde nuestra intuición. Por ejemplo, los primeros cuatro postulados que Euclides (1999) propone: (1) dos puntos determinan una (única) línea recta; (2) todo segmento puede prolongarse; (3) todos los ángulos rectos son congruentes y; (4) dado un centro y un radio siempre puede trazarse una circunferencia —falta aquí el postulado de las paralelas sobre el que añadiremos algo más adelante—. Luego vienen las primeras 28 proposiciones que van adquiriendo, a medida que se avanza, un carácter gradualmente menos intuitivo. En el primer grupo están: desde un punto exterior a una recta siempre puede bajarse una perpendicular; todo segmento de recta tiene un punto medio y por ese punto puede levantarse una perpendicular. Un poco más adelante Euclides demuestra que un ángulo exterior de un triángulo siempre es mayor que cualquiera de los ángulos internos no adyacentes. Refiriéndose a las líneas paralelas prueba que si los ángulos alternos internos entre dos rectas determinados por una transversal, son iguales (congruentes) entonces dichas rectas deben ser paralelas. Un lector cuidadoso podría preguntarse por qué dentro del marco de las primeras 28 proposiciones, Euclides no recurre, en ningún momento, al postulado de las paralelas. Sería natural entonces intentar ir adelante sin necesidad de ese postulado. Lo interesante aquí es que muchos geómetras intentaron seguir esta ruta ¡durante *más de veinte siglos!*

La estrategia que siguieron muchos, convencidos de lo superfluo del postulado de las paralelas, fue añadir a los cuatro primeros postulados alguna proposición que parecía, en cada caso, muy elemental, muy fácil de aceptar como era el caso con los cuatro primeros postulados. En cada caso, el propósito era demostrar

que el sistema de cuatro postulados, 28 proposiciones y la proposición auxiliar, era suficiente para producir una demostración del postulado de las paralelas, que entonces pasaría a ser un teorema más de la geometría. Todo esto fue concebido, desde sus inicios, como un ejercicio lógico sin poner en duda, en ningún momento, la validez de la geometría euclidiana como *modelo exacto* del espacio físico. No había, pensaban los geómetras, posibilidad de otra geometría. Geómetras como Wallis adoptaron como proposición auxiliar que: *dado un triángulo siempre existe un triángulo semejante diferente al primero.*

Sin embargo, tomando como punto de partida la colección de las primeras 28 proposiciones, se puede demostrar que la hipótesis de Wallis es lógicamente equivalente al postulado de las paralelas.



Otro intento del mayor interés lo produjo Farkas Bolyai, padre de uno de los creadores de la geometría no-euclidiana: *dados tres puntos no alineados, siempre existe una circunferencia que pasa por esos tres puntos*. De nuevo se pudo demostrar que suponer esta proposición, que nos parece tan clara, es equivalente al postulado de las paralelas. No hace falta aquí un comentario más amplio, pues lo que se quiere mostrar es que el sistema compuesto por las primeras 28 proposiciones y claro, los primeros cuatro postulados de Euclides, definen un sistema de *geometría absoluta*. Si ahora añadimos el postulado de las paralelas (en cualquiera de sus formas equivalentes, como las ya mencionadas) tendremos el texto completo de Euclides.

Si los geómetras del siglo XIX se hubiesen quedado con el programa:

- 1 Cuatro postulados + 28 proposiciones = geometría absoluta
- 2 Geometría absoluta + postulado de las paralelas = geometría euclidiana

habrían confirmado la creencia sobre la geometría euclidiana como único modelo del espacio. La proposición 29 de Euclides afirma (ver Figura 2):

Figura 2. Ángulos Alternos-Internos entre paralelas

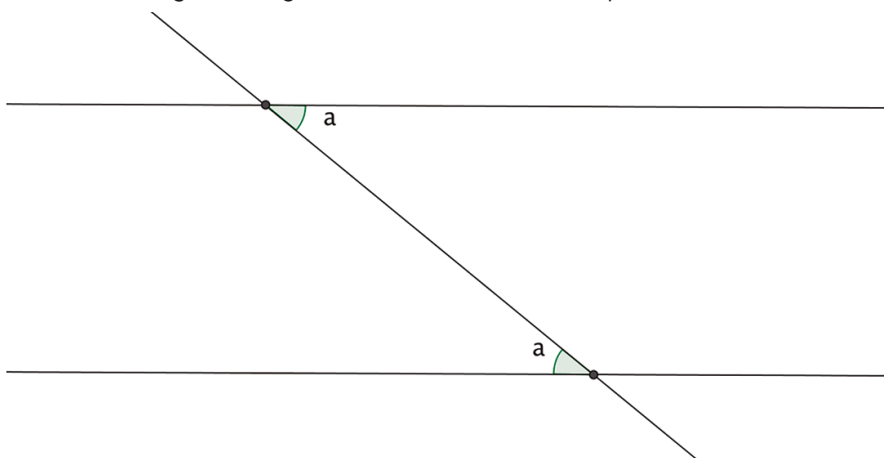
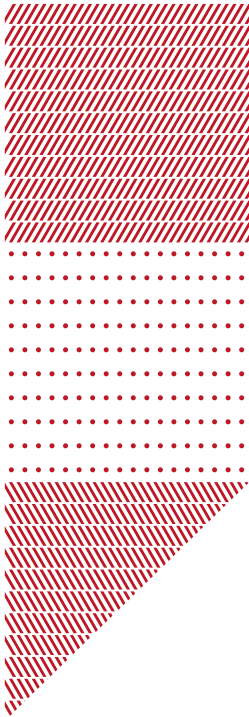


Figura 2: Si dos rectas son paralelas, entonces, los ángulos alternos internos formados por una transversal son iguales.

Aquí es importante resaltar que si hubiese más de una paralela no podríamos determinar *unívocamente* los ángulos alternos internos.

De modo que por primera vez, era crucial la unicidad de la paralela por un punto exterior a una recta, que es la afirmación central del ya varias veces mencionado postulado de las paralelas. Nótese que el problema se ha desdoblado: por una





parte, está la parte lógica, de si en un sistema dado (en este caso la geometría absoluta) es posible demostrar una proposición y por otra parte, la convicción sobre el espacio: *el espacio es euclidiano*.

Si uno se mantiene en el contexto del marco postulacional ignorando voluntariamente que ese marco ha sido construido como el modelo del espacio, la afirmación sobre la unicidad de una paralela por un punto exterior a una recta en un plano, puede verse así, como una proposición más del sistema. El problema es que este sistema geométrico nació profundamente enraizado de las experiencias sensorio-motrices de las personas. Una persona mira a su alrededor y percibe un espacio perfectamente descrito por la geometría euclidiana. Entonces, *¿cómo dudar del postulado de las paralelas aún si no podemos demostrarlo?* En esencia, esta era la posición de los geómetras *¡durante más de veinte siglos!* El siglo XIX resultó crucial para la transformación epistémica de las matemáticas. Una *episteme* es una estructura de pensamiento que recoge lo esencial del pensamiento de una época particular. Cuando se afirma que durante el siglo XIX surgió un cambio profundo en la concepción de las matemáticas, tal afirmación significa que una nueva episteme matemática tomó el lugar que hasta entonces había tenido la concepción de las matemáticas como una representación icónica del mundo material. Cuando Newton afirma que la ley universal de la gravitación, está extendiendo al universo una experiencia de carácter sensorio-motriz matematizada a través de los sistemas simbólicos. Este cambio epistémico tuvo lugar no solo en la geometría sino también en el álgebra y en el análisis matemático, entre otras vertientes matemáticas.

¿Qué ocurrió, en particular, en el campo de la geometría? Como hemos narrado ya, se llegó al siglo XIX con una geometría euclidiana bien desarrollada. Sin embargo, había un problema que no estaba bien fundamentado y este se refería al postulado de las paralelas. Como un radio que produce ese ruido familiar para los radios aficionados mientras se intenta sintonizar una emisora lejana, esa geometría llegaba sin ofrecer claridad sobre el status del postulado de las paralelas: *¿Acaso se podía demostrar como teorema ese postulado desde el marco de la geometría absoluta añadiendo tal vez una proposición adicional (i.e. geometría absoluta ampliada)?* Cuando algún geómetra afirmaba haber demostrado (como teorema) el postulado de las paralelas, siempre añadió a la geometría absoluta una proposición equivalente al quinto postulado, *¡que justamente era lo que se trataba de demostrar!* En consecuencia, ese problema llegó sin respuesta al siglo XIX después de viajar más de veinte siglos por diversas culturas matemáticas. Si la geometría euclidiana era la

verdadera geometría del espacio material, ¿por qué no se había podido *demostrar deductivamente*, como tantas otras propiedades del espacio, aquella propiedad de unicidad de la paralela? Esa especie de grieta entre lo que la experiencia perceptiva marcaba y lo que no lograba capturar el marco postulacional, era una fuente permanente de inquietud y desazón entre los geómetras. El mapa (la geometría) que se suponía era idéntico al territorio (el espacio físico), no lograba capturar esa propiedad del espacio que *evidentemente* era correcta, es decir, la unicidad de la paralela por un punto exterior a una recta dada.

La duda germina

Entrado el siglo XIX, muchos geómetras empezaban a presentir la *independencia* del ya famoso postulado. Tal vez era posible una geometría distinta a la euclidiana si se aceptara que por un punto exterior pasa más de una paralela. La aceptación de esta opción chocaba con la profunda convicción sobre la correspondencia exacta del mapa geométrico con la realidad física. Lentamente, sin embargo, fue ganando terreno el atreverse a dudar de la geometría euclidiana como la cristalización del espacio físico...a pesar de triunfos como el de Eratóstenes y la obra cimera de Newton, por ejemplo. Es notable lo que escribe Gauss en una carta a un colega sobre la posibilidad de *otra* geometría (véase el texto *Euclidean and non-Euclidean Geometries* de M. Greenberg, 1980). Vale la pena detenerse en ese magistral texto:

Pero la situación se torna más compleja cuando se supone que la suma es menor que 180°. Este es el punto crítico; el arrecife donde tienen lugar todos los naufragios...he meditado sobre este caso durante treinta años... aunque nada he publicado sobre él. La hipótesis que la suma es menor que 180° conduce a una geometría extraña, muy diferente de la nuestra, pero totalmente consistente, la cual he desarrollado a mi entera satisfacción y puedo resolver en ella todo problema excepto la determinación de una constante que no puede ser designada a priori. Cuanto mayor es esa constante más nos aproximamos a la geometría euclidiana y si la constante es infinita las dos geometrías coinciden. Los teoremas de esta geometría parecen paradójicos y para el lego en la materia, absurdos. Pero, calma. Una reflexión sostenida revela que no contiene nada imposible. Por ejemplo, los ángulos de un triángulo se tornan tan pequeños como se desee si se toman los lados suficientemente grandes y, aun así, el área nunca excede una cantidad fija. Todos mis esfuerzos para descubrir una contradicción, una inconsistencia en esta geometría, han sido vanos... pero me parece, a pesar de la vacía sabiduría de los metafísicos, que casi nada sabemos acerca de la verdadera naturaleza del espacio como para pensar que lo que nos parece antinatural sea imposible. (pp. 243-244)



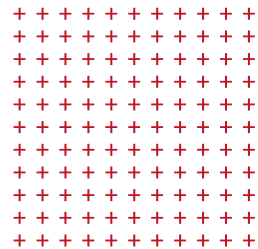
Hay varias observaciones en este texto que muestran la penetración de Gauss sobre el tema de la posible existencia de una geometría no-euclidiana, en la que por un punto fuera de una recta pasa más de una paralela. La suma de los ángulos de un triángulo será menor que 180 grados; la semejanza de triángulos, por ejemplo, se confunde con la congruencia; existen triángulos que no tienen circuncentro. Estos son resultados que Gauss seguramente conocía pero que



jamás publicó. En la carta, sin mencionarlos, alude a resultados extraños a primera vista, pero añade que lo que nos parece antinatural no necesariamente es imposible. Vemos aquí, todavía incipiente, la grieta entre la percepción humana del espacio y la geometría desarrollada deductivamente.

Esta grieta no es privativa del desarrollo de la geometría. También se dio entre el cálculo basado en una noción intuitiva del continuo y el posterior análisis matemático. En álgebra con la elaboración de multiplicaciones no-conmutativas y un poco más adelante con la teoría matemática del infinito. Lentamente —porque nada de esto fue de un día para el otro—, la creencia que sostenía que las matemáticas reflejaban, como en un espejo, el mundo material, fue dando paso a una concepción de las matemáticas como una organización racional, deductiva, de nuestras observaciones sobre el mundo material en un principio y posteriormente, como todo aquello que podía ser obtenido deductivamente. Aclaremos: demostrar deductivamente que la suma de los ángulos de un triángulo es 180 grados resulta compatible con nuestra intuición sensorio-motriz. Aquí parece haber una correspondencia exacta entre nuestra intuición y la lógica con la que se arma la prueba deductiva. Pero afirmar que el baricentro, el ortocentro y el circuncentro de un triángulo están sobre una misma recta ya no es un resultado que proviene de una abstracción simple, ya no nos resulta intuitivamente clara. Nos convencemos de ello *porque tenemos una demostración* de ese resultado y es a partir de allí que empieza uno a comprenderlo y otorgarle cierto grado de *naturalidad*. La interacción cognitiva entre nuestra inteligencia sensorio-motriz y nuestra razón deductiva se manifiesta bidireccionalmente. Esto puede ser ejemplificado con el ajedrez: uno aprende a mover las piezas sobre el tablero guiado por las reglas (postulados) del juego y a medida que se va compenetrando con el juego las diversas posiciones de las piezas empiezan a cobrar un sentido más profundo. Mas adelante, uno observa una partida en la que no participa activamente y partiendo de la configuración de piezas sobre el tablero puede predecir, por ejemplo, al ganador, si es el caso. Uno empieza a desarrollar una intuición a partir de la configuración en el tablero. Usualmente en el aprendizaje matemático uno parte de una visión intuitiva y

gradualmente va adquiriendo una destreza para moverse en el terreno formal, organizado a partir de ciertos postulados. Desde luego, el aprendizaje es mucho más complejo que esta descripción que hemos dado aquí. El aprendizaje pasa sustancialmente por el *desarrollo de la autonomía* del estudiante.



La intuición y la organización deductiva

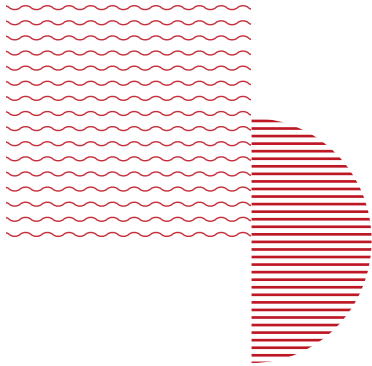
Como acabamos de ver, hay una fuerte interacción entre nuestro pensamiento intuitivo y nuestro razonamiento formal —guiado por postulados y por lo que previamente se haya podido

demostrar deductivamente—. Hoy día lo vemos como algo casi natural, pero tomó un largo tiempo llegar a esta conclusión en matemáticas y otras disciplinas. Es un resultado del cambio epistémico que tuvo lugar durante el siglo XIX. Para la cultura científica previa al siglo XIX, la geometría —insistimos en ello por su importancia—era algo así como

un mapa simbólico del espacio material, como si la versión simbólica fuese la imagen en el espejo de ese espacio material. Como consecuencia del cambio epistémico esa concepción sufrió una transformación profunda: la geometría empezó a ser imaginada no como un mapa idéntico al territorio sino como uno de sus *modelos posibles*. Es decir, como un verdadero mapa y no como uno que es idéntico a su territorio.

Fueron N. Lobachevsky y J. Bolyai, ruso y húngaro respectivamente, quienes *se atrevieron a pensar* en una geometría en donde no se impusiera la unicidad de la paralela por un punto exterior a una recta dada. Si la geometría era como el espejo sobre el que se reflejaba el espacio físico, Lobachevsky y Bolyai, *fracturaron ese espejo* y con ello arrojaron una duda profunda sobre la correspondencia entre el espacio físico y lo que se veía sobre ese espejo. Se atrevieron a pensar y *publicar* (lo que no hizo Gauss) que la correspondencia entre el espacio material y su representación simbólica organizada como geometría euclidiana, tan solo era aproximada. En su obra *Los Nuevos Principios de la Geometría* (1974) Lobachevsky escribió:

Los sucesivos intentos fallidos por más de dos mil años, desde los tiempos de Euclides, hicieron que se despertase en mí la sospecha de que *la verdad que se deseaba probar no estaba contenida en los datos* [mismos del problema], y que para establecerla sería necesario recurrir a experimentos, por ejemplo, observaciones astronómicas, como es el caso para otras leyes de la naturaleza. (Bonola, 1955, p.92).



De manera explícita Lobachevsky plantea que, los sucesivos fracasos durante tantos siglos para producir una demostración del postulado de las paralelas no se debían a incapacidad de los geómetras sino a que dicho postulado era *independiente* de la geometría absoluta. Esta observación tiene un carácter muy profundo y por primera vez se planteaba en matemáticas: *la existencia de una proposición que no podía ser demostrada dentro de una teoría (la geometría absoluta) en la cual dicha proposición tenía sentido.*

Entonces, si el postulado de las paralelas no podía ser demostrado dentro de la geometría absoluta no habría lugar a contradicción si en su lugar se añadía a los cuatro primeros postulados de Euclides un nuevo postulado que dijera: *por un punto exterior a una recta (en un plano) pasan más de una paralela.* Llamemos a éste, *postulado de Lobachevsky.*

Lobachevsky tenía la convicción que el nuevo sistema (cuatro primeros postulados más el postulado de Lobachevsky) no resultaría contradictorio. Sin embargo, introduce una nueva idea: la geometría euclidiana es un modelo muy adecuado, pero no coincide estructuralmente con el espacio material. Si es así, entonces el nuevo sistema (llamado geometría hiperbólica) también puede ser un modelo del espacio físico: si trabajamos en un espacio “pequeño” la geometría euclidiana es adecuada, pero si trabajamos a nivel astronómico, digamos, entonces la geometría hiperbólica podría ser un mejor modelo. Insistiendo en esta línea de investigación, diez años más tarde (1835) Lobachevsky escribe:

Basándome en observaciones astronómicas...verifiqué que en un triángulo cuyos lados son casi tan grandes como la distancia de la Tierra al Sol, la suma de los ángulos difiere de dos rectos en menos de 0.0003 segundos. En consecuencia, puede afirmarse que las proposiciones de la geometría práctica han sido rigurosamente establecidas. (Efimov, 1980, p. 16).

Se va haciendo visible la nueva orientación que concibe la geometría como un modelo, como un mapa que no se confunde con el territorio, a saber, el espacio físico. Al concebir esa manera de explorar la naturaleza del sistema geométrico, Lobachevsky estaba lanzando un mensaje importante, insistamos en esta idea, a saber, que la naturaleza euclidiana del sistema geométrico estaba basado en experiencias del espacio de dimensiones pequeñas, lo que alcanza el ser humano a captar a su alrededor sin ayuda de instrumentos que amplifiquen su percepción. Esa intuición era la que estaba incrustada en el sistema de postulados de Euclides (1999).

Un triángulo como el empleado por Lobachevsky podría haber revelado un rasgo geométrico desconocido hasta entonces siempre y cuando la suma de los ángulos de su triángulo hubiera diferido de 180 grados por una cantidad superior al margen del error experimental. Como se sabe, afirmar que la suma de los ángulos internos de un triángulo sea exactamente 180 grados, es una aserción lógicamente equivalente al postulado de las paralelas. Entonces, Lobachevsky *desafió* al sistema euclidiano con su experimento de medición, pero su resultado no fue concluyente. Es interesante que él hable de la geometría euclidiana como *práctica*; se puede presentir que tenía clara la diferencia entre el sistema formal, organizado alrededor de los postulados y la *adecuación* del sistema como *modelo* del espacio físico.

Esta idea que hemos comentado muy repetidamente, que un sistema matemático es solo un modelo, un mapa, todavía no estaba madura. Justamente esa idea va a desarrollarse, en gran medida, a partir del trabajo pionero de Lobachevsky y Bolyai —a quien aquí solo hemos mencionado de pasada aunque su trabajo tiene tanta importancia como la que corresponde al geómetra de Kazán—.

El problema que aquí hemos intentado explicar constituye uno de los momentos más significativos de las matemáticas dichas modernas. La *des-sustanciación de los sistemas formales* de las matemáticas, es decir, la distinción entre sistema formal y modelo, ha sido de una importancia que no se puede exagerar. Puede afirmarse sin titubeos que la *epistemología de las matemáticas* sufrió con la creación de las geometrías no-euclidianas, una transformación que llega hasta nuestros días. No es un problema del pasado, como no lo es la teoría de la evolución darwiniana como elementos transformadores del concepto mismo de conocimiento científico.

La geometría como mapa—no como territorio

La emergencia de las geometrías no-euclidianas enseñó que el espacio euclidiano no era la naturaleza intrínseca del espacio físico, sino la manera más adecuada de entender ese espacio partiendo del conocimiento que proporciona la experiencia sensorio-motriz de nuestro cuerpo y su posterior *redescripción* representacional como un sistema de geometría. Estamos aquí como bordeando un abismo: el que existe entre el nivel de conocimientos matemáticos basados en nuestra *intuición* como querían casi todos los matemáticos hasta el siglo XIX, y el conocimiento formal extraído de una organización postulacional (o axiomática), como quería David Hilbert. Un contemporáneo de Hilbert, Henri Poincaré (1905) ideó un puente para cruzar este abismo. La recta euclidiana

se traza sobre un plano euclidiano, entonces, *para trazar una recta hiperbólica se requiere un plano hiperbólico*. Pero ¿dónde está ese plano? La respuesta de Poincaré es digna de resaltarse por su simplicidad. Nos recuerda una sentencia de C. Zeeman (1976), quien sentenció durante una conferencia: “La destreza técnica equivale a dominar la complejidad pero la creatividad equivale a dominar la simplicidad”. (Conferencia sobre Teoría de Catástrofes, Río de Janeiro, IMPA, 1976).

La respuesta de Poincaré (1905) consistió, primero, en imaginar un mundo cuyas leyes físicas llevaban a sus habitantes a concluir que la geometría del espacio que habitaban (en realidad la geometría que se desprendía de sus observaciones de ese mundo) era hiperbólica. En segundo lugar, describió cómo podía ser el plano hiperbólico y las rectas hiperbólicas. A continuación, describiremos algunos de los elementos esenciales de su contribución. Se trata del *semiplano de Poincaré*.

Imaginemos un plano atravesado por una recta. Tomemos uno de los dos semiplanos y olvidemos el otro. Si lo pensamos en términos cartesianos, el semiplano con el que trabajaremos se define como el conjunto de todos los pares (x, y) para los que $y > 0$.

Dados dos puntos A y B del semiplano considerado, el h-segmento (la h indica *hiperbólico*) que los conecta es, porque así lo hemos decidido, el arco de circunferencia que tiene como centro la intersección del eje x con la mediatriz del segmento euclidiano que une A con B (ver Figura 3).

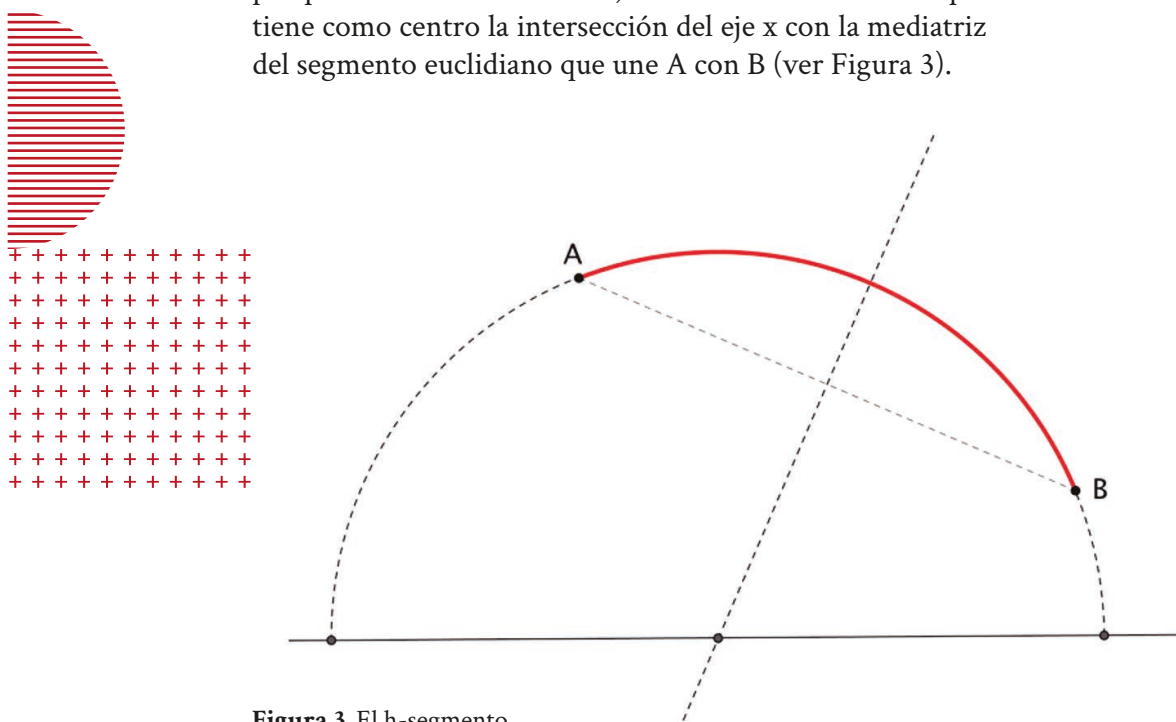


Figura 3. El h-segmento

Este arco, como ilustra la Figura 3, es parte de la semicircunferencia ortogonal a la recta frontera (o eje de las abscisas, si se prefiere) que pasa por A y B. Esa semicircunferencia, sin los dos puntos de intersección con el eje x, es una h-recta completa. Euclidianamente, la longitud de esa semicircunferencia es $\pi \cdot R$ donde R es su radio. Pero al interpretarla como recta hiperbólica, su longitud resultará infinita pues conecta dos puntos que se encuentran sobre la recta frontera que es inalcanzable. En las otras direcciones, alejándose del borde o dirigiéndose a derecha o izquierda dentro del semiplano, este se extiende indefinidamente. Sabemos entonces que las h-rectas son las semicircunferencias ortogonales al eje de las abscisas. También serán rectas hiperbólicas las semirrectas perpendiculares a la recta frontera. Es fácil comprobar que con estos acuerdos se cumplen los primeros cuatro postulados de Euclides, aclarando que los ángulos, se miden de la misma forma que se miden en la geometría euclidiana. Veamos que NO se cumple el postulado euclidiano de las paralelas, sino que, por un punto exterior a una recta, pueden pasar por lo menos dos paralelas. Para ilustrarlo elijamos como h-recta, la h-recta AB como se ve en la Figura 4. Por el punto P podemos trazar las paralelas PA y PB; PA es la paralela a la izquierda de AB y PB es la paralela a la derecha de AB. Entonces por P pasan por lo menos esas dos paralelas: no se cumple el postulado euclidiano de las paralelas (ver Figura 4).

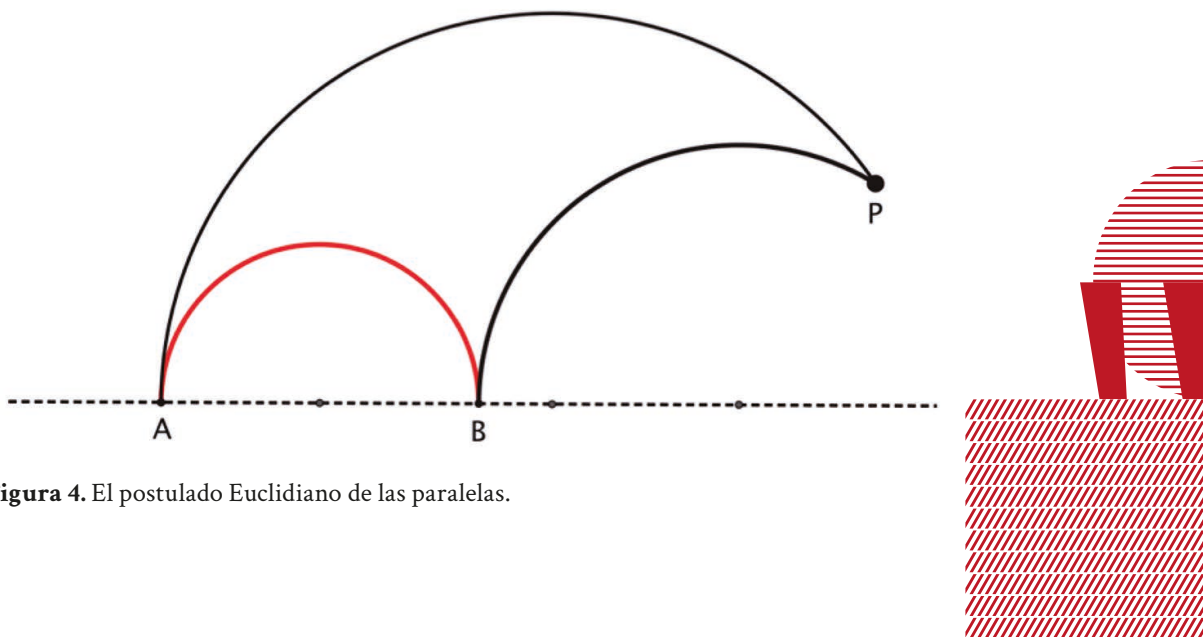


Figura 4. El postulado Euclidiano de las paralelas.

Ahora elijamos tres puntos A, B y C, y construyamos el h-triángulo que tiene vértices A, B y C como en la Figura 5. *Se ve* que la suma de los ángulos interiores de este triángulo es menor que 180 grados. Una virtud de este modelo hiperbólico es que nos permite emplear nuestra intuición: tenemos una imagen concreta, un modelo, de las rectas y figuras de esta geometría tan extraña pero coherente.

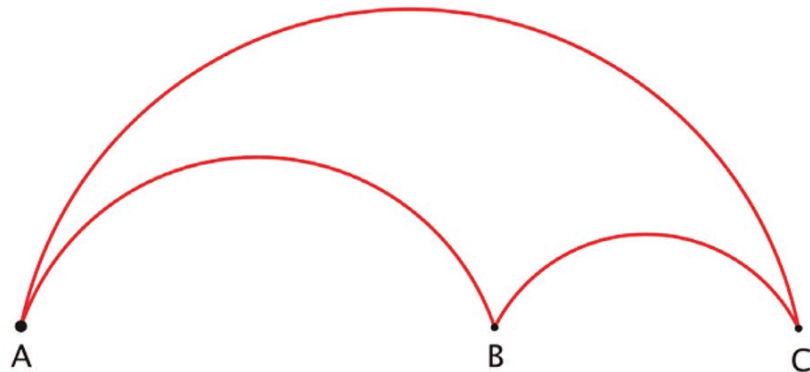


Figura 5. Suma de los ángulos en el h-triángulo



Si en el triángulo anterior llevamos los tres vértices hasta el borde del semiplano, cada ángulo medirá cero, pues en cada vértice habrá un par de rectas ortogonales al borde que se encuentran en ese vértice: por lo tanto, el ángulo que se forma entre ellas es cero (ver Figura 6).

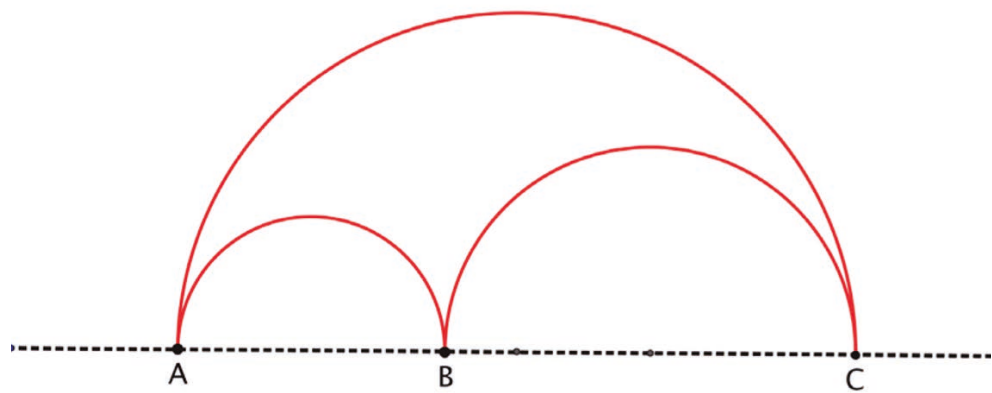


Figura 6. Un caso extremo

Observación importante: La narrativa que estamos desarrollando corresponde a la interacción en el salón de clases con los profesores que participaron durante las sesiones en las que fuimos exponiendo estas ideas. Muchas de las explicaciones que aquí se ofrecen, responden a preguntas y discusiones colectivas de

entonces. Desafortunadamente nuestro poder narrativo no hace plena justicia a la riqueza de las discusiones y debates en el salón de clases. Las construcciones que realizamos se hacen a partir de herramientas euclidianas y esos resultados los interpretamos como hiperbólicos. Esto tiene una consecuencia profunda: hemos creado un modelo (una especie de mapa del territorio hiperbólico) en el interior de la geometría euclidiana. Por lo tanto, si la geometría hiperbólica condujera a alguna contradicción, esa misma contradicción sería una contradicción euclidiana. Ni más ni menos.

Teniendo en cuenta el asombro que había causado entre los docentes la estrecha vinculación entre la geometría euclidiana y la hiperbólica con respecto a su interdependencia lógica y las dificultades para explicar este hecho crucial, recurrimos ahora a minimizar los objetos hiperbólicos para ver que se iban pareciendo cada vez más a los euclidianos. Es decir, cuando las dimensiones son muy pequeñas, los objetos hiperbólicos parecen euclidianos. Veamos unos ejemplos. Si tomamos un h-segmento AB y lo hacemos muy pequeño, se ve entonces como un segmento euclidiano (ver Figura 7):

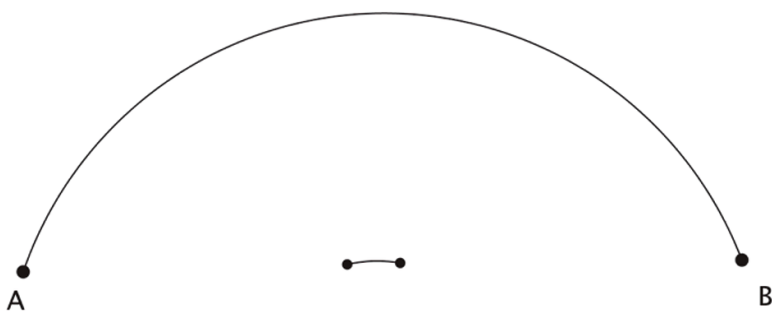
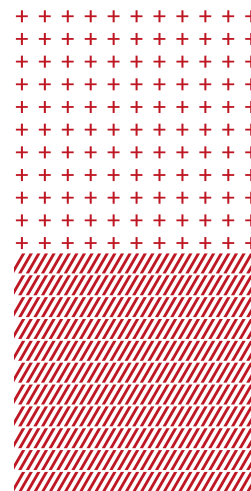
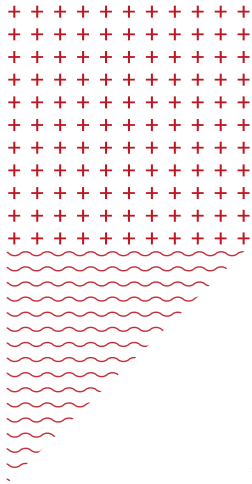


Figura 7. Un h-segmento “pequeño” parece un segmento euclidiano.

Eso parece explicar por qué la experiencia del espacio sugería, por más de veinte siglos, que el espacio físico era euclidiano: porque la experiencia directa del espacio tiene lugar en una zona muy pequeña del mismo y allí se percibe como Euclides nos lo organizó en sus *Elementos*. Decimos por ello que la geometría euclidiana es un modelo *corporizado*, porque sobre él proyectamos nuestra experiencia en el mundo que nos rodea.





El mundo matemático como aparece ante nosotros es el resultado de un proceso muy elaborado de simbolización a partir de nuestras experiencias y percepciones. *Y de nuestras acciones.* Dicho así, puede parecer incompleta la idea, y en efecto lo es, pero a medida que avancemos iremos poblando esos enunciados de sentido que los hará, para nosotros, más significativos. El mundo simbólico va ganando gradualmente una autonomía, como los personajes de una novela y es así, en ese nivel simbólico, casi autónomo, donde entramos en contacto con ellos en la escuela. Esa es pues una fuente de dificultades para el aprendizaje.

Llevemos esto a un evento ocurrido en un salón de clases. El profesor de geometría empieza a explicar que la suma de los ángulos de un triángulo equivale a ciento ochenta grados. Dibuja cuidadosamente un triángulo en el pizarrón, pero antes de seguir con su “explicación” uno de sus estudiantes, Leonardo, se acerca al pizarrón y con un medidor de ángulos va midiendo uno a uno y suma los resultados de sus mediciones: ciento ochenta grados. Entonces el profesor exclama: “has comprobado experimentalmente que ese triángulo que está dibujado en el pizarrón tiene una suma de ángulos que, como lo has hecho con mucho cuidado, podemos aceptar es de ciento ochenta grados”. “Pero Leonardo”, continúa el profesor, “¿acaso no tienes claro que hay una infinidad de triángulos y que no te alcanzaría la vida para ir de uno al otro verificando que la suma es de ciento ochenta grados?”

El joven Leonardo se queda sorprendido:

¿Cómo sabe el profesor que hay una infinidad de triángulos?
 ¿Dónde los ha visto y como ha hecho para contarlos; acaso conoce de alguno que no tenga los famosos ciento ochenta grados?

En 1972 René Thom, uno de los grandes pensadores del siglo XX, explicó en una conferencia que “el problema de la comprensión de las matemáticas no es el problema del rigor. Se trata de entender cómo existen los entes matemáticos y qué significan”.

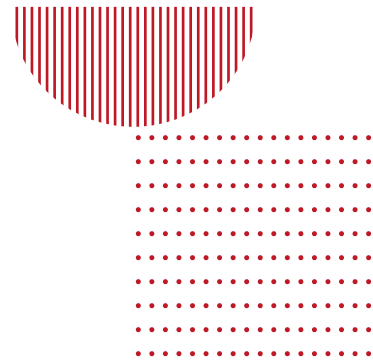
Por ejemplo, qué significan para el Leonardo de nuestra historia, ese estudiante a quien le habla su profesor de las propiedades de objetos que no puede tocar. Ni él ni su profesor. Sin embargo, cuando el profesor dibuja uno en el pizarrón y parece que se hace la luz, el profesor agrega que ese dibujo no es el objeto correspondiente. Entonces, el estudiante se pregunta por el significado de aquello que está

en el pizarrón, pero que *no es* lo que él creía que era. No es difícil pues estar de acuerdo con Thom (1972) quien expresó durante su conferencia ICME II, 1972 en Inglaterra que: “*el problema reside en saber de qué objetos se habla, de qué están hechos y cómo puede uno reconocerlos*”.

Si no se entiende esto, ¿cómo seguir adelante?

Si bien la idea de triángulo puede nacer de la experiencia de ver esa forma en un objeto material y luego reconocerla en otros objetos semejantes, el triángulo matemático es un *desprendimiento* de esas formas triangulares que podemos ver encajadas en objetos materiales. Como ese desprendimiento ya no es material, lo hay que capturar mediante otro medio: en este caso, el medio es simbólico. Podría decirse que la existencia simbólica es la continuación de la existencia material.

Si se nos pregunta en una clase “resuelva la ecuación: $2x-1=5$ ” habría que entender la x como un número escondido y para encontrarlo, hay que realizar unas operaciones aritméticas como las que normalmente se hacen entre números. Esa x *representa* un número que todavía no sabemos cuál es. Por eso un símbolo también lo podemos ver como una manera de representar la generalidad. Así es en matemáticas. Si queremos decir algo sobre los triángulos, por ejemplo, que la suma de sus ángulos siempre equivale a ciento ochenta grados, dibujamos un triángulo, pero ahora lo vemos, no como un triángulo en particular sino como esa sustancia simbólica que representa a todos. Es lo que hay que entender cuando se dice que el lenguaje de las matemáticas es un lenguaje de generalidad, de abstracción.



La geometría dinámica como respuesta didáctica

Tener un sistema de representación como el suministrado por GeoGebra, por ejemplo, permite cerrar la grieta entre nuestra intuición y nuestra capacidad deductiva. Esto es, podremos *explorar* guiados *sotto voce* por una organización formal que permanece oculta a los ojos del estudiante. Hay que tomar en cuenta que el estudiante de hoy entra en contacto con las matemáticas *después* del profundo cambio—aquí solo hemos podido describirlo someramente— epistémico que tuvo lugar durante el siglo XIX. Casi no se menciona en una clase, pero ya no interpretamos las matemáticas como una versión icónica de la realidad material: no vamos a ver “cómo es la realidad” y luego producimos una versión simbólica de ella. Finalmente hemos entendido que *hay que partir de la naturaleza de la cognición humana*. Con esto se quiere decir que lo que el ser humano observa no es una realidad independiente de él, sino que esa realidad observada

depende de quién es el observador. La historia de la ciencia muestra este hecho fundamental a través de, por ejemplo, las distintas maneras como cada época ha definido el universo: para un astrónomo caldeo o griego, ese universo era muy distinto al universo concebido por Newton y más aún, al universo concebido por Einstein mediante su teoría general de la relatividad.

Los cambios epistémicos están por ello en el centro de la enseñanza. Las matemáticas son una estrategia extraordinaria para inyectar orden y estructura en nuestras observaciones sobre la variación, sobre la acumulación y lo permanente. Así vemos el mundo que nos rodea como un flujo de cambio, y quien dice cambio dice *movimiento*. De allí que la geometría dinámica, la geometría de hoy, nos proporciona un instrumento didáctico inapreciable. Nos permite reinterpretar el pensamiento geométrico que hemos heredado y nos abre una ventana hacia una didáctica que fusiona los problemas de la naturaleza de las matemáticas con los problemas de carácter cultural y cognitivo de los estudiantes. Hoy, *explorar* es la actividad crucial para generar una matemática significativa.

Daremos para finalizar, un ejemplo elegido de las actividades con profesores en formación.

La geometría dinámica

Presentaremos un par de ejemplos del trabajo con los profesores:

La idea es contrastar las estrategias que se siguen al abordar un problema con papel y lápiz y cuando se le aborda en un medio dinámico como el GeoGebra. Dado un ángulo, el primer problema consistió en determinar el segmento que tiene como su punto medio P (ver Figura 8).

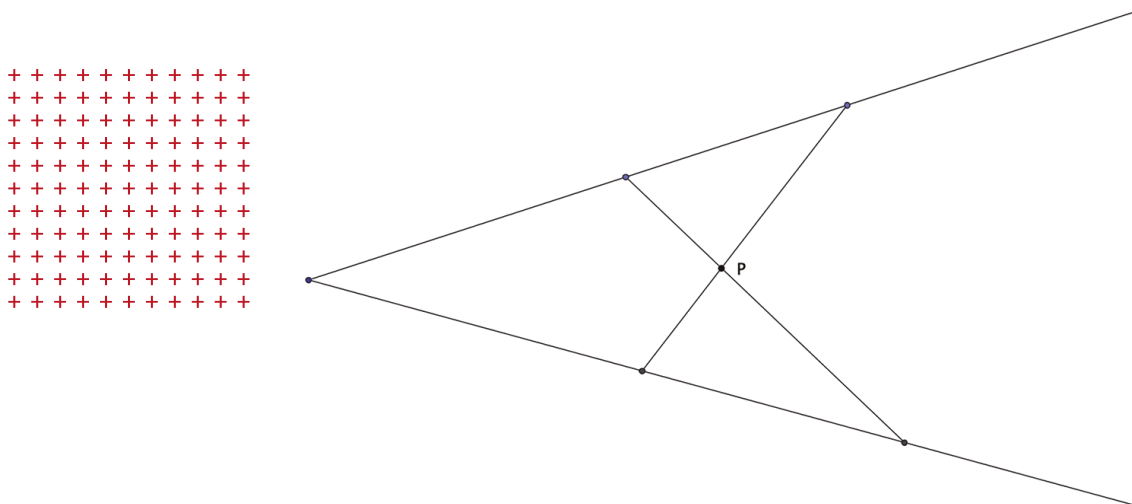


Figura 8. Una representación gráfica del problema

Los estudiantes (profesores en formación) que tenían mejor formación matemática previa llegaron a la siguiente solución (ver Figura 9):

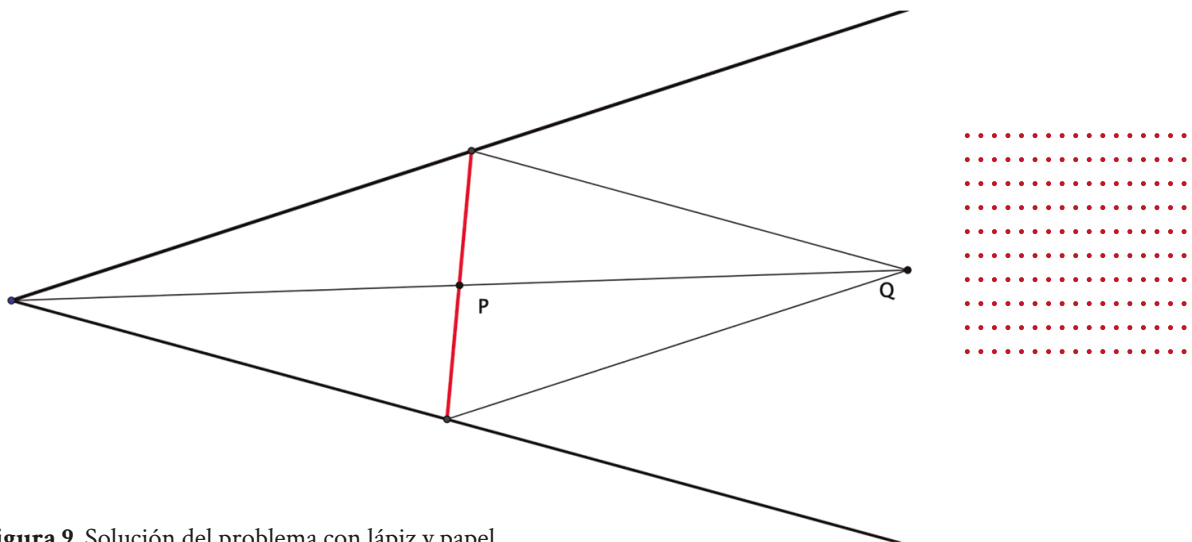


Figura 9. Solución del problema con lápiz y papel

Trazamos un ángulo y en el trazamos un segmento cualquiera. Encontramos su punto medio P. Tomaron el punto simétrico de P desde el vértice del ángulo para construir un paralelogramo. Sabiendo que las diagonales del paralelogramo se intersectan en su punto medio, la diagonal más corta (en la Figura 9) resuelve el problema.



Esta solución exhibió el conocimiento previo de algunos estudiantes-profesores, pero una vez que la explicaron en el salón de clases, la sensación que se vivió fue que *todo estaba dicho*.

Con frecuencia esa es la sensación que predomina cuando se trabaja en un medio de papel y lápiz: resuelto el problema, caso cerrado. Es difícil que el impulso de exploración, debido a la naturaleza del medio estático, tenga una aparición espontánea. Los problemas se pueden resolver, pero una vez resueltos, allí terminan. Es la actitud que con mayor frecuencia se observa.

El medio dinámico provee al estudiante de una mayor capacidad de expresión y estimula una exploración más amplia que puede tomar rutas divergentes. Sin embargo, este riesgo vale la pena asumirlo puesto que desarrollar el hábito de explorar es más importante, aún más, es crucial

para alcanzar un entendimiento pleno del problema que se estudia: abre la posibilidad de elaborar diversas estrategias de solución. Lo que es más difícil en el medio estático.

Al abordar el problema en el medio dinámico, en un inicio ocurrió justamente la divergencia esperada, pero gradualmente fueron surgiendo ideas razonables. Un estudiante sugirió que el segmento buscado se encontraría eligiendo primero un punto sobre un lado del ángulo y luego trazando una circunferencia con centro en P y radio PR. Entonces al ser cuestionado por sus compañeros, el estudiante indicó que había pensado que la circunferencia tangente a ambos lados del ángulo le daría la solución. Pero se enfrentó a esta posibilidad (ver Figura 10):

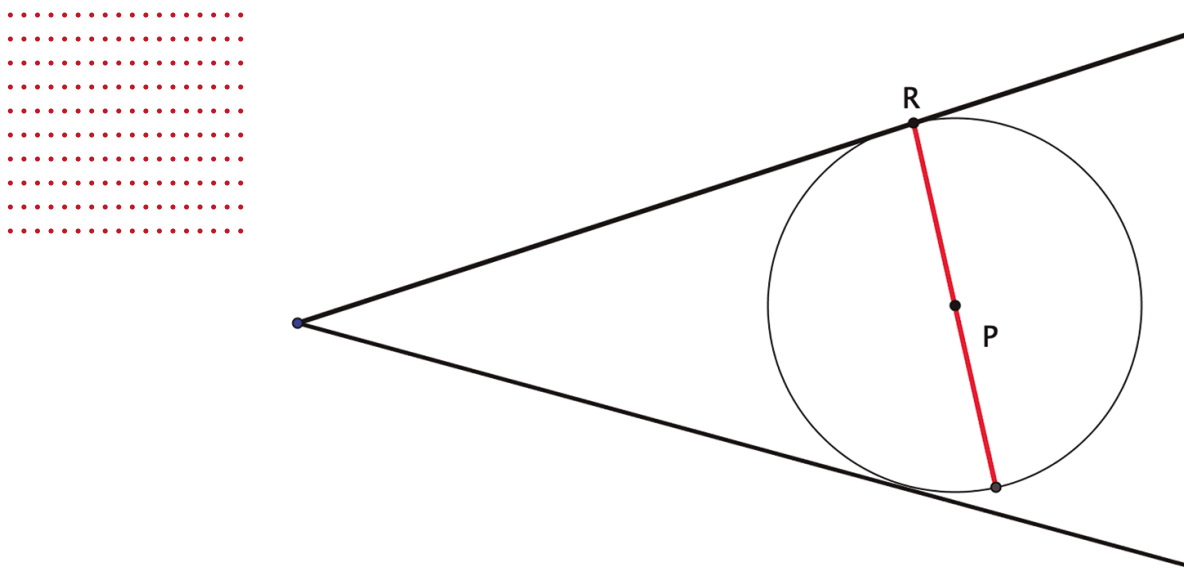


Figura 10. Exploración en un medio dinámico

El otro punto de tangencia no coincide con el extremo inferior del diámetro que pasa por R. Pero ya se estaba desencadenando un interés entre todos y todos empezaron a proponer alternativas diversas. La que tuvo finalmente mayor acogida fue la propuesta de trazar la trayectoria del punto inferior del diámetro y observar que cuando ésta intersece al lado inferior del ángulo, ese será uno de los extremos S del segmento buscado y el otro extremo será T el simétrico del anterior respecto al punto P. Así tendremos la solución buscada. Este acercamiento al problema no requiere conocer el vértice del ángulo original. Basta que las rectas no sean paralelas pues si lo son, el problema se resuelve tomando un segmento perpendicular a las rectas paralelas que pase por el punto P (ver la Figura 11).

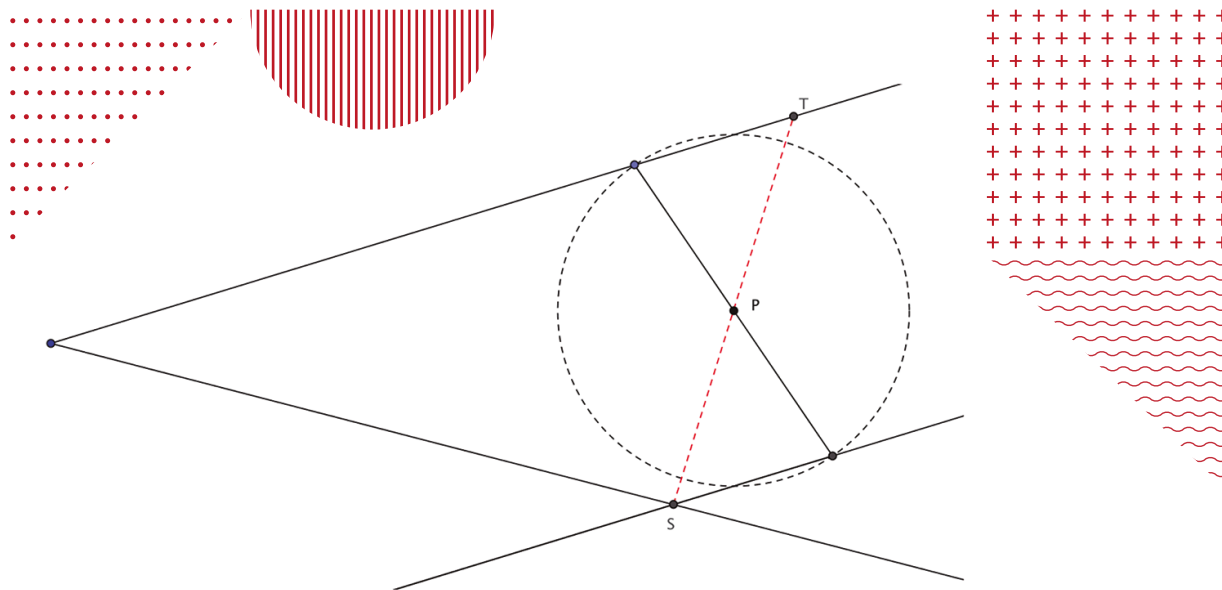


Figura 11. La búsqueda de un contra-ejemplo en el medio dinámico

Este acercamiento al problema es casi imposible que surja en un contexto de enseñanza estático. Varios días más tarde, una estudiante consultó a los profesores del curso de geometría y añadió que había leído en un texto que ese triángulo tenía una propiedad que no habíamos discutido en nuestras sesiones de trabajo: entre todos los triángulos cuyo tercer lado pasa por P, aquel que habían hallado, es el que tiene menor área. No pudo resolver esta cuestión procediendo deductivamente (como en la primera solución del problema) pero la figura dinámica sobre la pantalla sugiere (y esto se hizo en una sesión de trabajo), tratar de estimar la diferencia de áreas entre el triángulo solución y cualquier otro (ver Figura 12):

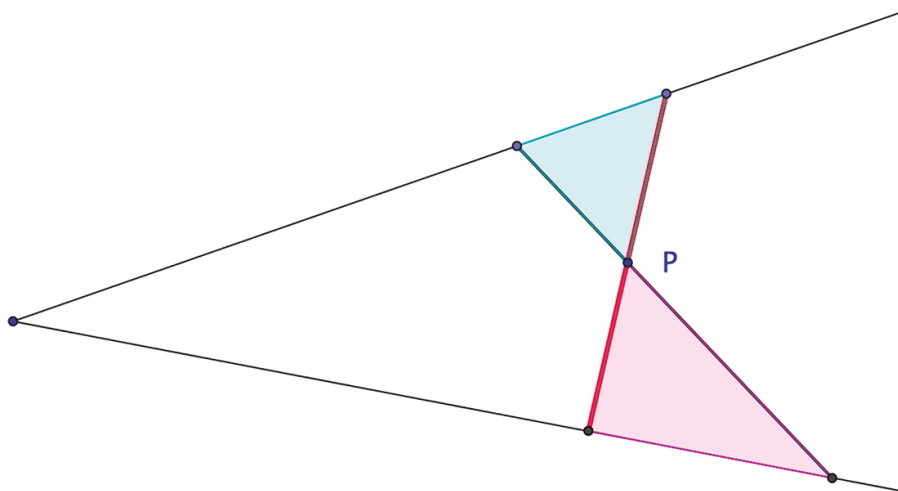


Figura 12. En la búsqueda de una prueba híbrida



La línea roja en la figura 12 marca el tercer lado del triángulo solución. Cualquier otro tiene un área que parece exceder a la del triángulo solución. Entregamos esta figura para la discusión en la siguiente sesión de trabajo. Los estudiantes *sintieron* que el dibujo sobre la pantalla, si bien ayudaba a elaborar el argumento de una prueba deductiva no parecía suficientemente fuerte en términos

argumentales. Entonces iniciamos una discusión sobre la demostración en matemáticas (de alguna manera era ese uno de los objetivos) y resaltamos que las figuras que se producen mediante GeoGebra están elaboradas respetando las reglas matemáticas: son *figuras estructurales* no meramente dibujos, como los que uno produce sobre el papel. La conclusión, una vez que se discutió y ciertamente se asimiló esta última observación, fue que la figura anterior sí conducía a elaborar una prueba. La conclusión final de las discusiones fue: la geometría dinámica, aparte de suministrar un medio matemático de exploración, permite elaborar *pruebas híbridas*. Constituye un sistema de representación simbólico pero la *ejecutabilidad* de dichas representaciones va más allá de un recurso visual informal: son representaciones cuya estructura subyacente permite generar argumentos formalizables.

Conclusiones

Este trabajo pretende instalar en las reflexiones de los profesores aspectos que consideramos cruciales para el ejercicio de su profesión. Pensamos y tratamos de sustentarlo a través de un texto que rescate elementos que han estado gravitando en el desarrollo de las matemáticas, de manera central el tránsito de una visión de las matemáticas que produce representaciones idénticas (salvo la apariencia) a la realidad material del mundo. Esa visión sufrió una transformación profunda durante el siglo XIX. Los estudiantes y profesores de hoy, sobre todo los profesores, no pueden ignorarlo. Esa es nuestra posición al reflexionar sobre la educación. Esto no implica que las vertientes del aprendizaje puedan o deban copiar lo que ha sucedido a nivel histórico, pero la polise-
mia matemática de hoy en día exige que podamos explicar sus orígenes. No hemos tratado de ser rigurosos desde la perspectiva de un historiador, sino narrar ciertos hechos que han marcado el rumbo moderno de una disciplina como las matemáticas, señalando aspectos que pueden ser provechosos desde la perspectiva de la educación. Daremos algunas referencias que pueden ser de provecho para quien desee proseguir una reflexión educativa que hemos situado en un programa de *epistemología aplicada*. A nuestro juicio, de eso se trata la educación matemática.

Notas

¹ Investigador titular CINVESTAV-México. Correo electrónico: lmorenoarmella@gmail.com ORCID: [0000-0001-5055-5782](https://orcid.org/0000-0001-5055-5782)

* Este trabajo se inscribe en una línea de investigación que denominamos *epistemología aplicada*, nuestra manera de ver lo que debe ser la educación a través de las matemáticas.

Referencias

- Bonola, R. (1955). *Non Euclidean Geometry: A Critical and Historical Study of its Development*. New York: Dover.
- Efimov, N.V. (1980). *Higher Geometry*. Moscow: Mir Publishers.
- Euclides. (1991). *Elementos*. Barcelona: Gredos
- Greenberg, M. (1980). *Euclidean and Non-Euclidean Geometry: Development and History*. San Francisco: W.H. Freeman and Company.
- Lobachevsky, N. (1974). *Nuovi Principi della Geometria*, Italia: Universale Scientifica Boringhieri.
- Newton, I. (1999). *The principia. Mathematical principles of natural philosophy*. Berkeley and Los Angeles, California: University of California press.
- Poincaré, H. (1905). *Science and Hypothesis*. New York: Walter Scott Publishing.
- Wertsch, J. (1991). *Voices of the Mind*. Harvard University Press.
- Thom, R. (1972). 'Modern mathematics: does it exist?' in: Howson, A.G. (Ed.), *Developments in Mathematical Education*, Proceedings of ICMI 2, Cambridge University Press, 194-209.
- Zeeman C. (1976). La destreza técnica equivale a dominar la complejidad, pero la creatividad equivale a dominar la simplicidad. Conferencia sobre Teoría de Catástrofes, Río de Janeiro, IMPA.

