DIARIO DE UNA INTERVENCIÓN DIDÁCTICA

Diary of a didactic intervention

•••

Diário de uma intervenção didática

Por:

Luis Moreno Armella[1]
Departamento de Matemática Educativa,
CINVESTAV, México.
lmorenoarmella@gmail.com
iD: 0000-0001-5055-5782

Liliana Tabares[2]
Departamento de Matemática Educativa,
CINVESTAV, México.
lilytabares@gmail.com

Recepción: 25/07/2019 • **Aprobación:** 19/12/2019

Resumen: Este artículo se propone narrar una parte de nuestra experiencia vivida a lo largo de varios semestres tratando de enseñar ideas fundamentales de la teoría del cálculo. Nos proponemos explicar cómo ha ido cambiando nuestra mentalidad didáctica y matemática al ser testigos de las dificultades conceptuales de los estudiantes –y vivirlas con ellos– cuando son confrontados con situaciones que generan una tensión entre sus intuiciones y el rigor aritmético propio del análisis. Las atmósferas vividas en el salón de clases, las tensiones entre los intentos de enseñar y los profundos obstáculos para el aprendizaje nos indican la existencia de una fisura epistémica al intentar transitar de una manera de entender sensorio-motriz a otra de rigor aritmético.

Palabras clave: Didáctica; Cálculo; Infinitésimos; Infinito; Rigor.

Abstract: This article aims at narrating a part of our experience lived over several semesters trying to teach fundamental ideas of the theory of calculus. We intend to explain how our didactic and mathematical mentality has changed by witnessing students' conceptual difficulties - and experiencing those with them - when they are confronted with situations that generate a tension between their intuitions and the arithmetic rigor owed to the analysis. The classroom atmosphere, the tensions between the attempts to teach and the deep obstacles for learning indicate the existence of an epistemic gap when trying to move from a sensory-motor way of understanding to one of arithmetic rigor.

Keywords: Didactics; Calculus; Infinitesimal; Infinite; Rigor.

Resumo: Este artigo narra parte de nossa experiência vivenciada ao longo de muitos semestres tentando ensinar ideias fundamentais da teoria do cálculo. Propusemo-nos explicar como nossa mentalidade didática e matemática foi mudando conforme nos tornamos testemunhas das dificuldades conceituais dos estudantes – e vivenciá-las com eles – quando confrontados em situações que geram tensão entre suas intuições e o rigor aritmético próprio da análise. As atmosferas experimentadas em sala de aula, as tensões entre as tentativas de ensinar e os obstáculos profundos para a aprendizagem nos apontam a existência de uma fissura epistêmica ao se tentar transitar de uma percepção sensório-motora a outra de rigor aritmético.

Palavras-chave: Didática; Cálculo; Infinitésimos; Infinito; Rigor.

Este artículo no recibió financiación.

¿Cómo citar este artículo? / How to quote this article?

Tabares, L., y Moreno Armella, L. (2019). Diario de una intervención didáctica. *Praxis, Educación y Pedagogía*, (3), 6-43. doi: 10.25100/praxis_educacion.v0i3.8793

Introducción

Ideas germinales del cálculo en un *laboratorio* didáctico

Las ideas de cambio y acumulación que eventualmente se abrieron camino desde las primeras versiones del cálculo, tienen un largo pasado. Si nuestra mirada es la de un didacta, la de alguien interesado en el diseño de trayectorias de aprendizaje, por ejemplo—no la de un historiador profesional—podremos reconocer en El Método Mecánico de Arquímedes (2006) el germen de ideas que llegarían a constituir, muy posteriormente, el cálculo integral. Arquímedes califica al Método como toda una estrategia para descubrir teoremas, un ejemplo de lo que hoy llamamos una heurística. La heurística arquimediana está basada en el equilibrio de los cuerpos. Arquímedes imagina que los objetos matemáticos son cuerpos hechos todos con el mismo material y, por lo tanto, si tienen el mismo peso tendrán el mismo volumen si son sólidos y, si son cuerpos planos, tendrán la misma área. Así llegó a lo que hoy, al hablar del volumen de la esfera, traducimos como $4\pi r^3/3$. Hay un camino para llegar al resultado y otro camino para justificarlo. En el texto del Método que hoy se sabe fue redactado como una carta para su amigo Eratóstenes, Arquímedes introduce el tema de la exploración mecánica de posibles teoremas geométricos afirmando que:

> Por lo demás estoy convencido, que no es en absoluto menos útil en orden a la demostración de los teoremas mismos. Pues algunos de los que primero se me hicieron patentes por la mecánica, recibieron luego demostración por geometría, *habida cuenta de que la investigación por ese método queda lejos de una demostración*; como que es más fácil construir la demostración después de

> haber adquirido por ese método cierto conocimiento de los problemas, que buscarla sin la menor idea al respecto. (cursivas añadidas) (p. 73)

Arquímedes hace patente que ya para él la manera de explorar es distinta a la manera de justificar. Las demostraciones arquimedianas seguían el canon euclidiano. Lo novedoso es la forma tan sistemática (de allí que sea un *método*) como él explora el territorio geométrico.

Ha sido un accidente histórico que ese texto se haya tornado inaccesible durante siglos hasta que a inicios del siglo XX fue hallada la única versión que se conoce. Ninguno de los precursores del cálculo de los siglos XVII en adelante, por ejemplo, tuvo conocimiento del trabajo heurístico de Arquímedes aunque al ver lo que había sido capaz de demostrar formalmente (por doble reducción al absurdo) pudieron sospechar que Arquímedes había llegado a sus descubrimientos por otra vía, como en efecto ocurrió.

A comienzos del siglo XVII, Cavalieri (Edwards, 1979) generó ideas semejantes (no iguales) a las explicadas por Arquímedes con su método mecánico. Por ejemplo, si se tienen dos cuerpos de igual altura y los concebimos como formados por láminas (lineales o bidimensionales) que a cada altura intermedia tienen igual longitud (o área), entonces se puede concluir que los dos cuerpos tienen igual área (o volumen). La Figura 1 ilustra este Principio de Cavalieri:

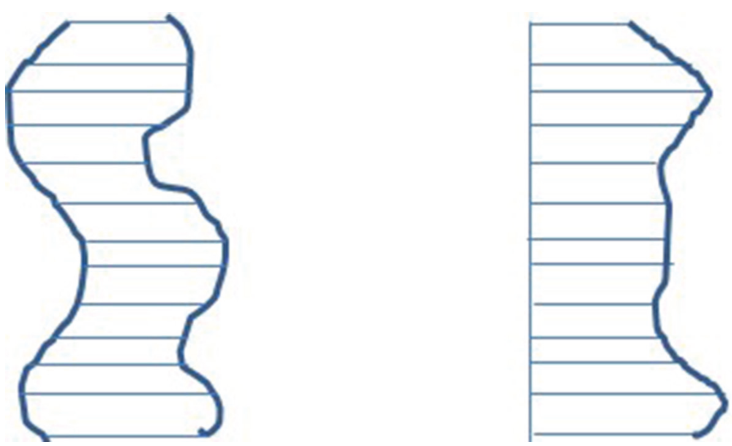

Figura 1. Cuerpos de igual área

Este principio puede aplicarse para hallar la fórmula correspondiente al volumen de la esfera. Es decir, $4\pi r^3/3$. Para ello, consideramos un cilindro de altura y radio de su base ambos iguales a r. Consideremos también media esfera de radio r y un cono de igual base y altura que el cilindro e "incrustado" en dicho cilindro (Figura 2); se puede comprobar sin muchas dificultades que la media esfera tiene un volumen igual a $2\pi r^3/3$.

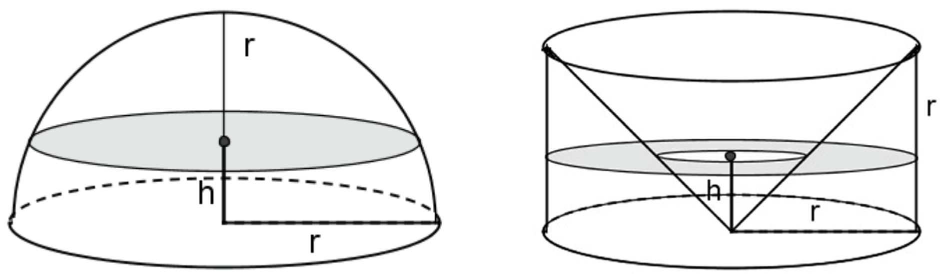

Figura 2. Volumen de la esfera

Las zonas sombreadas en ambas figuras tienen igual área en cada altura intermedia respectiva. Se pueden vislumbrar aquí ideas germinales que más adelante, transformadas, formarán parte del cálculo integral. Como didactas —insistamos—recurrimos a estas ideas para diseñar trayectorias de aprendizajes posibles. Vamos entresacando ideas y reorganizándolas de acuerdo a nuestras metas.

Lo que hoy entendemos como rigor matemático en el análisis, es resultado de un proceso de transformación de las matemáticas, por lo menos desde los tiempos de las matemáticas griegas. Basta revisar los Elementos de Euclides (Heath, 1956) para tener un antecedente de una forma de entender el rigor matemático –no la única, por cierto. Revisando algunas ideas tempranas de la geometría, el cálculo del área del círculo, por ejemplo, tendremos la oportunidad de diseñar rutas para el acceso a estas formas de conocimiento. La Figura 3 ilustra cómo podemos aproximarnos al área encerrada por el círculo mediante el proceso de inscribir polígonos regulares de seis, doce, veinticuatro lados y sucesivamente duplicando en cada paso el número de lados de la sucesión de polígonos inscritos.

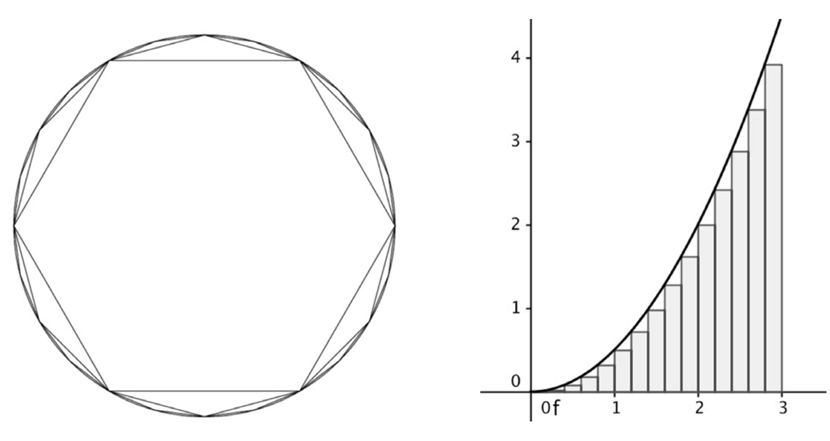

Figura 3. Método exhaustivo

Esta idea insinúa (pronostica una trayectoria de aprendizaje) el método de aproximación al área bajo una curva que está presente en las versiones actuales del cálculo–sin que estas sean las mejores. Tanto el área encerrada por el círculo como el área bajo la curva, pueden aproximarse con el grado de precisión que se desee. Esa idea de aproximación queda razonablemente clara si no abandonamos el contexto geométrico–una suma de áreas rectilíneas va aproximando cada vez mejor un área curvilínea. Cuando se exploran con el auxilio de figuras geométricas son accesibles. En cambio, en experiencias posteriores, el proceso dinámico de aproximación se traduce aritméticamente en el temido ε (épsilon) que controla el error cometido en la aproximación. En otras palabras, el ε sirve para determinar el número mínimo de lados del polígono inscrito en el círculo que garantiza que la diferencia entre el área del círculo y la del polígono sea menor que ese ε (el margen de error permitido). El contexto familiar de la geometría elemental permite una interpretación del ε diríamos que concreta, intuitiva. Es crucial tomar en cuenta esta observación pues abre una vía para el entendimiento de la posterior noción aritmética de límite. Sin embargo, su presencia prematura cuando se pasa a contextos que no son geométricos, genera daños en el proceso de aprendizaje; esto queda elocuentemente ilustrado con este diálogo que no está ausente de muchos salones de clase:

> **Estudiante**: un automóvil lleva una velocidad de 100 kms por hora… ¿qué significa?
> **Profesor**: ¡ah! Eso significa que dado un $\varepsilon>0$, podemos hallar un $\delta>0$ tal que si
> $|t_2 - t_1| < \delta$ entonces: $|(d2-d1)/(t2-t1)-100| < \varepsilon$.

Más allá del cuidado que el profesor dedique a explicar los términos que aparecen en su respuesta, sabemos que esta explicación está lejos de la mayoría de los estudiantes –y de muchos profesores añadimos. Este lenguaje alejado de su intuición sensorio-motriz produce una ruptura en la comunicación y la lógica subyacente no hace aflorar el significado que se intenta transmitir. Permanece inerte. Hay varias razones para explicar (¡por lo menos para intentarlo!) esa ruptura entre dos explicaciones de lo que aparentemente es el mismo fenómeno. Nuestra hipótesis de trabajo es tajante: no son el mismo fenómeno. A este nivel inicial de aprendizaje las interpretaciones posibles están fuertemente vinculadas a los contextos donde se está trabajando. De allí que una fuente de dificultades para el aprendizaje provenga de suponer que se trata de lo mismo solo que "dicho de otra manera".

Las ideas germinales ya revisadas del cálculo aparecen en el tránsito de figuras rectilíneas (polígonos) a figuras curvilíneas (el círculo) para estimar con toda precisión su área, y de figuras complejas como la esfera a su estudio mediante sólidos conocidos como el cilindro y el cono. Esa será una estrategia del cálculo para trabajar la reducción de la complejidad propia del conocimiento que se va desarrollando. Ahora presentaremos diversos pasajes –en forma resumida, desde luego– de situaciones que se han explorado con los profesores en formación.

La manera como Newton argumenta en su obra Principia Mathematica (1999) para describir las órbitas de los planetas puede ser vista como correspondiente a una versión de geometría dinámica. Al explicar que la trayectoria de un planeta es una elipse, un punto central de su argumentación es el siguiente: si el planeta no estuviera sometido a la fuerza de atracción del sol, su trayectoria sería una recta sobre la que se desplazaría a velocidad constante, de acuerdo con el principio de inercia hecho explícito por Galileo. Pero imaginemos, siguiendo a Newton, que en ese instante cuando el planeta se encuentra en el punto P sufre un "jalón gravitacional" hacia el sol. Entonces, la trayectoria a partir de P se desvía hacia Q, —siguiendo la ley del paralelogramo (Figura 4).

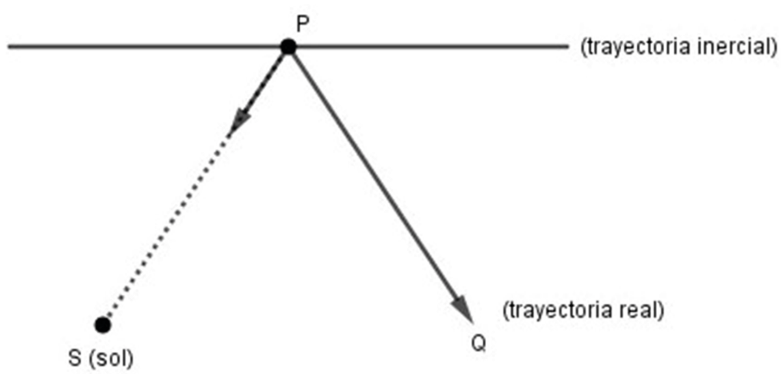

Figura 4. Efecto gravitacional sobre una trayectoria inercial

Si estos "jalones gravitacionales" ocurren cada cierto tiempo, la órbita del planeta alrededor del sol tiene una forma poligonal P-Q-R-T-… como se ilustra en la Figura 5.

e-ISSN: 2619-4791 • doi: 10.25100/praxis_educacion.v0i3.8793

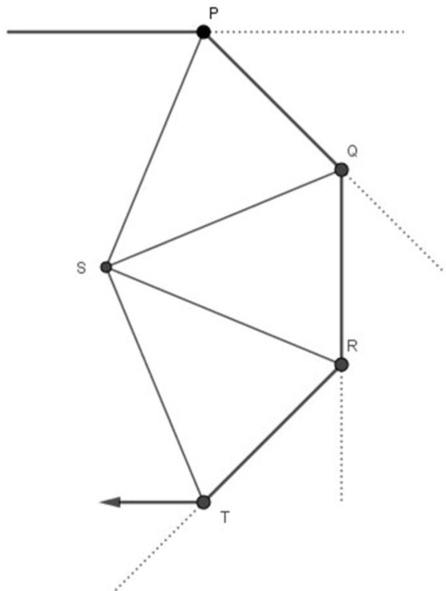

Figura 5. Trayectoria poligonal aproximada 1

Como el planeta no se escapa a la fuerza de atracción del sol, la órbita poligonal P-Q-R-T-etc, se cierra alrededor de S como se ilustra en la Figura 6.

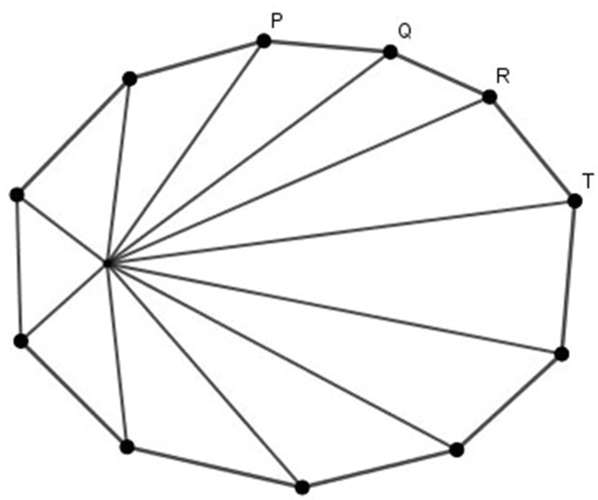

Figura 6. Trayectoria Elíptica Aproximada

Si en lugar de una sucesión discreta de jalones gravitacionales instantáneos, consideramos que la fuerza de atracción hacia el sol actúa continuamente sobre el planeta, entonces, en lugar de una trayectoria poligonal, se tendrá la órbita elíptica que corresponde al planeta. Lo que aquí se quiere resaltar es que el marco conceptual incorpora una suerte de geometría dinámica y la proposición que afirma que una curva, en este caso la elipse, se obtiene como límite de una sucesión de aproximaciones poligonales.

El marco euclidiano que sigue Newton implica validar sus resultados como si fuesen un capítulo o un nuevo libro añadido a los trece libros de los Elementos de Euclides. El espacio se sigue concibiendo como euclidiano, pero ahora el movimiento se torna una componente fundamental de la representación del espacio.

El medio cultural en donde se desarrolló el cálculo incluía números infinitamente grandes e infinitamente pequeños. Llevado al terreno de la geometría, la idea correspondiente era concebir una curva como si fuese un polígono con una infinidad de lados –como lo había hecho Newton–cada uno de longitud infinitamente pequeña. Si se prolongaba uno de esos lados, se obtenía entonces una recta tangente a la curva. La Figura 7 ilustra estas observaciones.

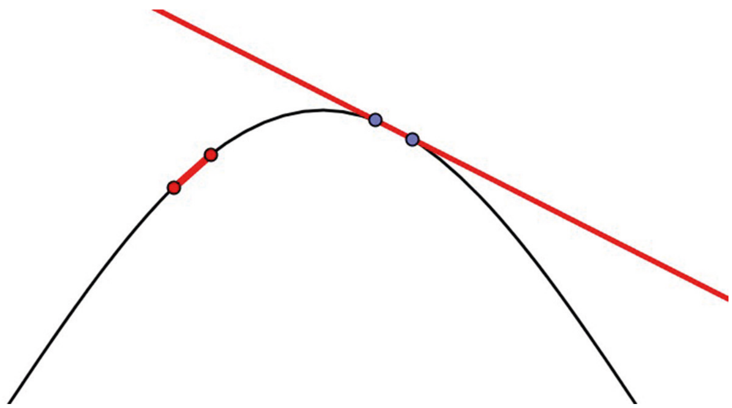

Figura 7. Prolongando un lado infinitesimal

Como han hecho muchos otros exploradores de las matemáticas, es fructífero incorporar las estrategias heurísticas de Euler a la reflexión y prácticas educativas. No en vano Polya (1954) lo tomó siempre como una referencia central de sus reflexiones sobre el descubrimiento y la justificación matemáticas.

Esta manera de imaginar la curva como un polígono de lados muy pequeños se puede leer en el libro de L Hôpital, *Análisis de los infinitamente pequeños* (1998), como uno de los principios organizadores de su texto. El otro principio en el libro de L Hôpital afirma que si se tiene una cantidad finita A y se le añade o resta una cantidad b infinitamente pequeña, entonces, en los cálculos que uno realiza con estas cantidades, A+b o A-b, pueden sustituirse por A.

A partir de estos dos principios pueden desarrollarse estrategias didácticas interesantes y eventualmente desarrollarlas como trayectorias experimentales. Ilustremos con un par de ellas. La idea que sugiere que si una curva es suave, la recta tangente es la mejor aproximación alrededor del punto de tangencia, correspondería, en el caso de L Hôpital, a prolongar uno de los lados de longitud infinitesimal del polígono que constituye la curva, para obtener la recta tangente. Los medios de geometría dinámica al alcance de los estudiantes-profesores, permiten cristalizar esta idea mediante el *zoom* alrededor del punto de tangencia (Figura 8).

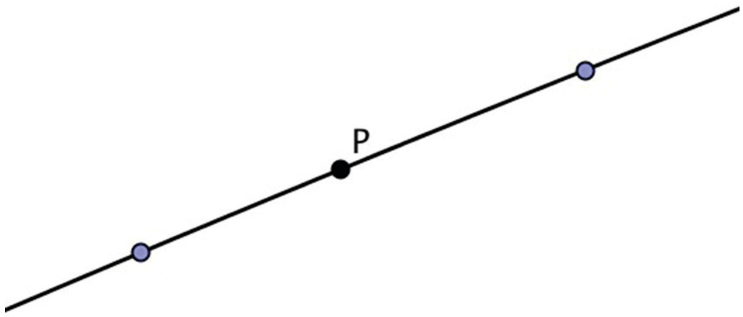

Figura 8. Curva localmente plana

Una síntesis de lo expuesto hasta ahora sería esta: hemos tratado de explicar cómo, en el tránsito del cálculo de longitudes y áreas de figuras rectilíneas al de figuras curvilíneas, podemos localizar una de las ideas germinales más importantes para el desarrollo del cálculo. Habría que añadir a este paso de lo rectilíneo a lo curvilíneo el movimiento, como central en los procesos de aproximación que, reiteramos, no se reducen a la aproximación numérica. La geometría dinámica es el escenario privilegiado de representación donde tienen lugar estos procesos. Podría decirse que esta forma de geometría es uno de los elementos infraestructurales para la cristalización de las ideas germinales que hemos discutido hasta este momento. La presencia de una aritmética que incluye números infinitamente grandes e infinitamente pequeños y de expresiones polinomiales de grado infinito a las que se transfieren las reglas ordinarias del álgebra, es otro.

El álgebra extendida de los infinitésimos

En el desarrollo del trabajo tratamos de seguir una orientación que no siempre fuese de lo simple a lo complejo, teniendo en cuenta que lo simple, desde un punto de vista lógico no necesariamente coincide con lo más natural desde el punto de vista intuitivo o de la experiencia del estudiante que recién llega al estudio de una disciplina o que ha tenido un acercamiento previo no satisfactorio. Aquí intentamos una presentación a ideas cruciales del cálculo tomando como punto de partida los infinitésimos. Un infinitésimo es el número más pequeño que podamos imaginar pero mayor que cero. Hay que reconocer que no es una idea fácil de aceptar cuando intentamos operarla aritméticamente y de hecho, en cualquier curso de cálculo hoy en día, esa es una noción casi prohibida, pero conveniente para hablar de lo infinitamente pequeño eludiendo (casi) la idea de límite. Sin embargo, tiene un alto valor heurístico–recordar a Arquímedes. Hablamos ya de cómo lo curvilíneo se podía abordar mediante lo rectilíneo muy pequeño. En la versión del cálculo de Leibniz se puede hallar razonamientos como el de la Figura 9.

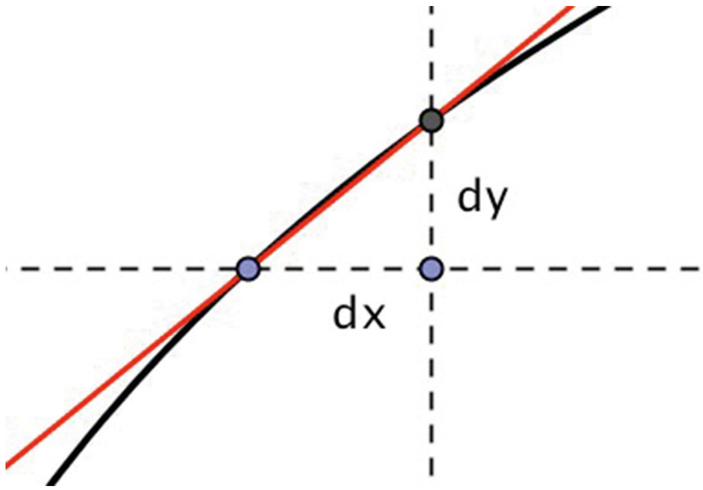

Figura 9. Pendiente de una curva

Es decir, en términos de los infinitésimos dx y dy, la pendiente (derivada) de la curva se expresa como dy/dx. Esto refleja la concepción de la curva como un polígono formado con lados infinitesimales. El acercamiento al cálculo vía infinitesimales es una estrategia para evitar la noción de límite. Leibniz escribió (véase Edwards, 1979) que:

> Hay que hacer un esfuerzo para mantener las matemáticas puras separadas de controversias metafísicas. Lo lograremos si dejamos de preocuparnos por la existencia de infinitos e infinitesimales [...] Empleamos infinitos e infinitesimales como una *expresión apropiada para abreviar nuestros razonamientos.* (cursivas añadidas) (pp. 264-265).

Leibniz siempre estuvo interesado en crear una notación que llevara de la mano al razonamiento. Algo así como una notación que guiara la mente así como ocurre con las líneas de las figuras geométricas y las fórmulas. Lo logró en matemáticas. Dos generaciones adelante, Euler siguió los pasos de Leibniz en su empleo de infinitos e infinitésimos en el campo numérico y dio un tratamiento de la función exponencial digna de los mejores tratados de la materia. Uno de los grandes matemáticos del siglo XX, A. Weil, expresó un punto de vista muy fuerte sobre el trabajo de Euler (Hairer & Wanner, 1995, p. 1): "estoy convencido de que nuestros estudiantes sacarían más provecho si estudiaran con el libro Introductio in Analysin Infinitorum de Euler en lugar de los textos modernos.”

Euler sabía que las áreas bajo la hipérbola: $y = 1/x$ se comportaban como logaritmos. Más precisamente, que el área entre $x = 1$ y $x = A$ era un logaritmo de *a.* Pero había que identificar la base de esos logaritmos representados como áreas hiperbólicas. Todavía sin identificarla numéricamente, Euler denominó ***e,*** la base de esos logaritmos. La Figura 10 y la Figura 11 ayudan (como hubiera querido Leibniz) a seguir la línea de su razonamiento:

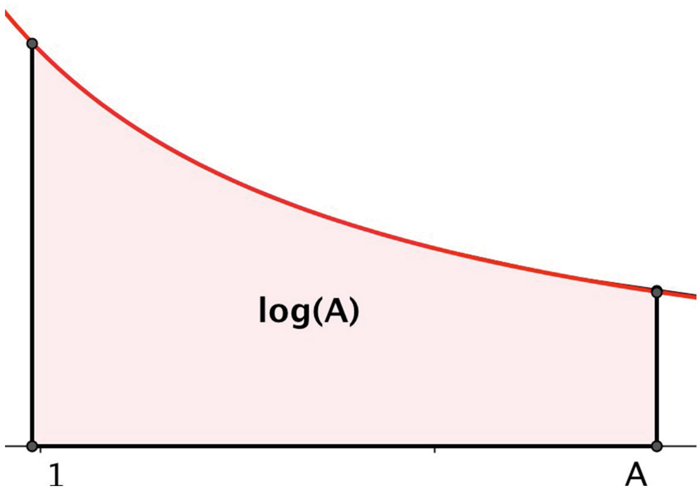

Figura 10. Logaritmos como áreas

Tomamos como A al número $1+w$, donde w es un número infinitesimal. Estaremos considerando entonces el área bajo la curva entre 1 y $1+w$. Como 1 y $1+w$ están muy cerca uno del otro, la variación de la función es imperceptible entre estos valores. Si tuviésemos un microscopio tan potente que nos permitiera percibir infinitésimos, la gráfica de la función entre 1 y $1+w$, la veríamos como:

Figura 11. Rectángulo infinitesimal

El área de este rectángulo equivale al logaritmo de 1+*w*. Pero esa área es igual a *w*. Por lo tanto:

$$log\left(1+w\right)=w$$

Como el logaritmo de un número es igual a la potencia a la que debe elevarse la base ***e*** para reproducir el número, tendremos:

$$\boldsymbol{e}^{w}=1+w$$

Ahora bien, hemos dicho que *w* es una cantidad infinitesimal, por lo tanto podrá expresarse como 1/N, donde N es infinitamente grande: *w=1/N.* De allí es fácil deducir *siguiendo las reglas de las operaciones aritméticas* que

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N}=\boldsymbol{e}$$

Si tomamos N=10,000 obtenemos la aproximación

$$\boldsymbol{e}=2.718145\ldots$$

Pero en la expresión $\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N}=\boldsymbol{e}$, N es un número infinitamente grande.

Ha sido muy revelador leer, durante el trabajo con los participantes en el laboratorio, lo que al respecto pensaba Leibniz (Edwards, 1979):

> Será suficiente hacer uso de ellas [de los infinitésimos y las cantidades infinitamente grandes] como una herramienta que tiene ventajas para los propósitos de calcular, de la misma manera que el algebrista trabaja con raíces imaginarias con gran provecho. Lo hacemos porque en ellas [en los infinitésimos] hay a mano una herramienta para calcular, como queda verificado de modo manifiesto con rigor en cada caso mediante el método que ya hemos presentado. (p. 265).

Estos ejemplos permiten apreciar la importancia de la fusión de la geometría con el álgebra que incluso fue llevada más lejos mediante los razonamientos sobre lo infinitamente grande y pequeño.

Conviene revisar lo que hemos tomado como "intuitivamente natural":

I. Hemos introducido en la exposición números infinitamente grandes e infinitamente pequeños.
II. Hemos extendido las operaciones aritméticas al sistema ampliado de números, donde además de los números "ordinarios" ahora tenemos los números descritos en (I).
III. Hemos garantizado que aún a "nivel microscópico" la gráfica de la función $y=\frac{1}{x}$ es continua.
IV. El comportamiento de la función se corresponde fielmente con el sistema numérico extendido.

Cuando decimos que la gráfica de la función $y=\frac{1}{x}$ entre 1 y $1+w$ se "ve" como un segmento de recta horizontal, nos estamos apoyando en un rasgo definitivo de la continuidad: a variaciones pequeñas de la variable independiente corresponden variaciones pequeñas de la variable dependiente. Como mostraremos posteriormente, existen propiedades de las funciones que puede expresarse tanto en el lenguaje geométrico como en el aritmético y que tienen interpretaciones en ambos dominios que son, ambas, fácilmente interpretables como equivalentes. Ambas interpretaciones tienen una fuerte carga intuitiva. En el ejemplo precedente, la aceptación de números infinitamente grandes y pequeños y la extensión del comportamiento de la función $y=\frac{1}{x}$, de su grafica y de su dominio a una recta geométrica que contiene números infinitamente pequeños, es intuitivamente aceptable (por extrapolación a "dominios microscópicos" de la idea de cercanía).

El valor heurístico de esta aceptación es muy apreciable pues permite encontrar una razón de ser a la expresión $e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ que está al alcance de los participantes.

En nuestro laboratorio didáctico fuimos avanzando lentamente sobre este territorio. Todo indicaba que, presentar prematuramente las ideas de límite en su forma cristalizada, rigurosa, tendría un efecto nocivo en los participantes. Por ejemplo, hemos detectado que ellos no perciben cómo es que la idea de límite de una sucesión se describe primero de manera dinámica como un proceso de aproximación cada vez más fino y posteriormente en términos estáticos –dado un $\varepsilon>0$ podemos hallar N natural tal que, para todo n mayor que N, $|a_n - L|<\varepsilon$.

El tránsito del acercamiento dinámico al estático no es superficial: implica un profundo cambio epistémico que la didáctica no puede ignorar. En efecto, al hacerlo este tránsito de repente, sin elaborar la idea a través de diversos contextos, los procesos y los objetos finales (el límite) no logran vincularse. Hay pues razones de peso para pasar de una descripción del límite de una sucesión a la definición aritmética de ese límite. Volveremos sobre este punto.

Hay que iluminar la ruta que va del descubrimiento (razonamiento analógico, intuitivo) hasta llegar a una forma pre-cristalizada de los teoremas centrales. El trabajo de aprendizaje matemático es una mezcla de conjeturas, analogías, deseo de que algo sea cierto, frustración y demostración. En nuestro curso-laboratorio hemos explorado ese paso del razonamiento inductivo al deductivo, tematizando el territorio de la justificación y la prueba.

El cálculo fue un heredero muy afortunado de la fusión de la geometría y el álgebra. El resultado de tal fusión, la geometría analítica, suministró a los pensadores matemáticos de un instrumento que permitió crear un escenario de movimiento en el seno de la geometría. Una recta tangente ya no era solamente un episodio aislado sobre una curva sino una recta que viajaba sobre la curva e iba ofreciendo información clave sobre la curva misma. La manera algorítmica de procesar dicha información la suministraba la componente algebraica. Estos elementos han sido claves para el desarrollo del cálculo durante el siglo XVII y son hoy día, de reflexión muy necesaria para la educación matemática de los profesores en servicio.

Un instrumento simbólico del infinito

Los procesos infinitos aparecen tanto en contextos geométricos como algebraicos y numéricos. Elegimos dar las discusiones iniciales en el terreno de la representación geométrica. Por ejemplo, se considera un rectángulo de altura 1 y base 2. Se procede entonces a descomponer su área, primero en la mitad (cuadrado de lado 1), luego un rectángulo que es la mitad del cuadrado restante (ver Figura 12), enseguida se añade la mitad del rectángulo restante y se continúa de esta manera.

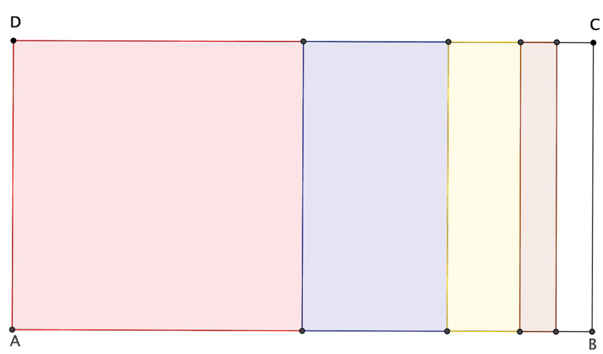

Figura 12. Una suma infinita

Numéricamente, resulta:

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}\right)+\ldots$$

Que debe ser igual a 2. *¿Cómo se lleva a cabo una suma infinita como la anterior?*

Era esta la pregunta que flotaba en el salón de clases el primer día que iniciamos esta exploración. La situación geométrica no dejaba lugar a dudas sobre la respuesta, era como un dedo índice que guiaba el pensamiento pero, si lo ignorábamos quedándonos en el terreno aritmético, los profesores sentían o mas bien, resentían la ausencia de una representación que facilitara una interpretación, es decir, una representación que diera significado a la situación explorada. Los participantes no podían generar un significado claro para lo que tenían frente a ellos, pues esa suma presentada así, escuetamente, no tenía un referente claro. Esta falta de referente que genere un significado es una situación que se agudiza cuando se exploran sumas infinitas (series numéricas) que, en general, no son fáciles de interpretar geométricamente. Aquí llegamos a un punto crucial: la necesidad de pasar de una descripción de la noción de límite a una definición. Cobra visibilidad la dualidad entre proceso y objeto que comentamos previamente.

Probablemente no haya mejor ejemplo para ilustrar la extensión a un dominio numérico que contenga números infinitamente grandes e infinitamente pequeños, que el exhibido por Euler cuando resolvió el llamado Problema de Basilea. La solución ilustra cómo Euler extiende las operaciones algebraicas a un sistema que contiene números infinitamente grandes e infinitamente pequeños. Podríamos ver esta situación como análoga a la concepción de Arquímedes (y de Cavalieri) de un cuerpo compuesto por una infinidad de láminas infinitamente delgadas. Se trata entonces de hallar el valor exacto de la suma infinita $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, **no** un valor aproximado. Cuando Euler abordó el problema ya se sabía que la suma era finita y menor que 2. Pero ¿exactamente?

Para cada *n*, los sumandos $1/n^2$ son menores que el término correspondiente:

$$\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

Y como $£\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$, es finita (de hecho, igual a 1) cuando *k* recorre los naturales empezando en $k=2$, entonces la suma infinita original (de sumandos $1/k^2$, también es finita y menor o igual a 2).

La solución de Euler a este problema ha sido estudiado como modelo para introducir nociones heurísticas relativas al estudio de las series infinitas. La estrategia que vamos a presentar someramente se ha desarrollado durante varias sesiones, como parte del laboratorio didáctico. Es un ejemplo que ha mostrado su adecuación para generar discusiones colectivas entre los maestros-estudiantes. De manera muy sintética se trata de esto: Primero, se recuerda que si una ecuación polinomial $P(x)=0$ de grado n tiene n raíces distintas $r_1, r_2,...,r_n,$ todas diferentes de cero y su término constante es igual a 1, entonces, el polinomio P(x) puede expresarse así:

$$P(x)=\left(1-\frac{x}{r_1}\right)\left(1-\frac{x}{r_2}\right)...\left(1-\frac{x}{r_n}\right)$$

En esencia, el método que vamos a presentar consiste, primero, en interpretar la expresión en serie de potencias (previamente estudiadas inductivamente) como un polinomio de grado infinito.

Considérese primero un polinomio de segundo grado con dos raíces no nulas a,b . Entonces, dicho polinomio puede expresarse así:

$$P(x)=\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{b}\right)=\frac{x^2}{ab}-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)x+1$$

Ahora pasemos a un polinomio de grado 4 con las raíces dobles no nulas $\pm a,\pm b$. Dicho polinomio se expresa como:

$$P(x)=\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{b}\right)\left(1+\frac{x}{b}\right)=\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)$$

$$P(x)=\frac{x^4}{a^2b^2}-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)x^2+1$$

Aquí observamos que el coeficiente de x^2 es la suma de los recíprocos de los cuadrados de las dos raíces a y b. Si el polinomio tiene seis raíces $\pm a,\pm b,\pm c$, entonces se expresa como:

$$P(x)=\left[\frac{x^4}{a^2b^2}-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)x^2+1\right]\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)$$

$$P(x)=-\frac{x^6}{a^2b^2c^2}+\left(\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{a^2c^2}\right)x^4-\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)x^2+1$$

e-ISSN: 2619-4791 • doi: 10.25100/praxis_educacion.v0i3.8793

Ahora el coeficiente de x^2 es la suma de los recíprocos de los cuadrados de las tres raíces *a, b, c*. De manera general –y aquí interviene el razonamiento inductivo–, si un polinomio tiene raíces $\pm a_1, \pm a_2, \pm a_3, \ldots, \pm a_n$, entonces el coeficiente de x^2 está dado por $-\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left(a_i\right)^2}$.

Ahora la audacia de Euler: Si existe un "polinomio" con una infinidad de raíces $\pm a_i$, todas distintas de cero, el coeficiente de x^2 será:

$$-\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left(a_i\right)^2}$$

Este polinomio existe y está (casi) dado por la expresión polinomial (serie de potencias) de la función seno:

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Sin embargo, dicho polinomio tiene una raíz nula, pues $\operatorname{sen}(0) = 0$, por lo tanto, como debemos considerar una expresión polinomial que no contenga raíces nulas, tomamos la siguiente:

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$$

Las raíces de este polinomio son $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$, es decir, tienen la forma $\pm n\pi \;, n \in \mathbb{N}$ Tomando en cuenta que el término cuadrático de dicho polinomio tiene coeficiente $-\frac{1}{3!}$ Entonces:

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{6} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Es decir,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Esta solución a la que hemos llegado mediante un razonamiento inductivo abre las puertas, además, a un nuevo enfoque para uno de los resultados más importantes de la historia del cálculo: el producto infinito de Wallis (Edwards, 1979, p. 169). Siguiendo la manera como se factoriza (recurso analógico) la serie de potencias correspondiente a *sen(x)/x*, tenemos:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x}=P(x)=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Ahora bien, haciendo $x=\dfrac{\pi}{2}$, en este producto infinito tendremos:

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{n^2\pi^2}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^2-1}{4n^2}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}\right)$$

De aquí obtenemos la forma clásica del producto de Wallis:

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}\right)$$

Es decir:

$$\frac{\pi}{2}=\left(\frac{4}{1\cdot 3}\right)\left(\frac{16}{3\cdot 5}\right)\left(\frac{36}{5\cdot 7}\right)\left(\frac{64}{7\cdot 9}\right)\ldots$$

Un proceso infinito, como el producto de Wallis (infinidad de factores), da como resultado un objeto matemático *concreto*: $\dfrac{\pi}{2}$

Los procesos y los objetos en matemáticas constituyen una única idea inseparable a diferencia de lo que ocurre en el mundo material: el proceso de elaboración de una mesa claramente no es igual a la mesa; la mesa está desvinculada del proceso. En su libro *How Mathematicians Think*, (2007) su autor W. Byers, narra una experiencia que ilumina esta fundamental idea de proceso/objeto cuando nos referimos a los conceptos matemáticos. El matemático W. Thurston contaba que cuando estaba en quinto grado se le ocurrió que un número como 131/3 era precisamente 131/3. Que hacer la división era fastidioso, en cambio pensar en 131/3 como un objeto (un número en sí mismo) no necesitaba trabajo extra. Fue entonces con su padre a contarle lo que había descubierto y este le dijo que, desde luego, 131/3 y 131 dividido entre 3, eran lo mismo, que 131/3 era 43.666…Thurston debió quedar un tanto frustrado. Pensar en 131/3 como un número, aún si uno no hace la división, permite usarlo más adelante en otros cálculos. El proceso de división se había tornado un objeto, no un procedimiento para producir la respuesta aproximada: 43.666.

Esta idea de dualidad en el seno de las matemáticas es crucial. A lo largo de este escrito iremos profundizando en ella.

Uno de los propósitos en el trabajo con los profesores ha sido revisar hechos fundamentales sobre la teoría de polinomios, y luego mostrar la fuerza del mecanismo de analogía y razonamiento plausible. En este caso, al prolongar propiedades al ámbito del infinito. Se trata a diario, de estimular el desarrollo de un pensamiento matemático autónomo. Recuperando resultados ya conocidos, como el producto de Wallis, pudo Euler dar una base de sustentación más convincente a la solución del problema de Basilea. Lo que hace Euler con el producto infinito de Wallis es análogo (no igual) a la confirmación de la hipótesis gravitacional de Newton cuando éste deduce de tal hipótesis, la forma elíptica de las órbitas planetarias que había hallado experimentalmente Kepler. Estas formas del razonamiento plausible generan expectativas genuinas sobre lo que sigue para transformarlas en pruebas deductivas. Desde luego, este ejemplo de Euler–Wallis requiere una preparación sostenida con el propósito de obtener resultados tangibles en el desarrollo del trabajo con los profesores.

Una ruptura crucial: el infinito cantoriano

Las ideas de variación y acumulación tal como se desarrollan en el cálculo temprano, presuponen una noción de continuidad heredada de nuestras experiencias sensoriomotrices de tiempo y espacio. Cuando pensamos en la recta numérica invocamos una experiencia igual o semejante a deslizar nuestra mano sobre una superficie lisa o recorrer con nuestros dedos el filo de una mesa o cualquier otra línea producida por el encuentro de dos planos. Entonces, decimos que esa idea de lo continuo es una idea corporizada, en el siguiente sentido: es resultado de la interiorización de experiencias sensoriomotrices, y por otra parte, la continuidad queda anclada al contexto de la recta euclidiana y es de allí desde donde la interiorizamos. No es la única idea o noción que podamos llamar corporizada. De hecho, las ideas matemáticas tienen una raíz corporizada. Sin embargo, hay ideas matemáticas cuyas raíces corporizadas son difíciles de identificar–sin que ello implique que no existan. Una de esas ideas es la de infinito matemático. Podemos imaginar un universo en expansión casi infinito con lugares a miles de años luz de la Tierra, pero no podemos omitir el *casi*. Si pensamos que estamos viendo un filme de esa expansión, podemos detenerlo y sabremos que en ese instante el universo es finito a pesar de la inmensa distancia que puede haber entre nuestro planeta y una galaxia extremadamente alejada de nosotros. Otra experiencia común es contar 1, 2, 3, …que nos da una idea de un conjunto que no termina aún cuando sabemos que podemos representar números enormes por ejemplo 2^{1000}. Experiencias con ejemplos como estos nos ayudan a entender la idea de infinito potencial, a saber procesos de crecimiento temporal que no terminan.

Pero hay otro infinito: el infinito actual. Si pensamos en el conjunto de los números naturales como un todo, empezaremos a vislumbrar la idea de un infinito actual. Queda claro que si usamos los números naturales para contar podremos ir avanzando: 1, 2, 3, 4, … siempre consumiendo poco o mucho tiempo según hasta donde lleguemos. Reiteremos: contar es un proceso temporal. Es una acción que no puede agotar al conjunto de los números naturales pues siempre hay un sucesor una vez que hayamos nombrado un número. Entonces, concebir el conjunto como un todo ya acabado, es algo que no puede ocurrir en el tiempo. No es resultado de un proceso temporal. El infinito actual es una noción atemporal. Lo actualmente infinito está dado, no se puede construir paso a paso aún si esos pasos son muchos.

Uno puede imaginar que el proceso de contar va generando el conjunto de los naturales y si imaginamos que este proceso llega a su fin entonces tendremos el conjunto completo de los números naturales. Pero esta suposición es tan solo eso: no podemos tener el conjunto total de los números naturales de esta manera. El proceso de contar o añadir sucesivamente el siguiente número natural muestra que el conjunto de números naturales es potencialmente infinito. Por otra parte, podemos decir: sea N el conjunto de *todos* los números naturales. Es decir de alguna manera, el conjunto está ante nosotros sin que le falte nada: existe como una entidad en sí misma. Ahora bien, ¿tiene sentido formular esa afirmación? En este momento fue oportuno plantear –en el laboratorio– una discusión sobre la existencia matemática, a saber, qué significa que un objeto matemático exista. Desde luego, la pregunta es muy profunda porque entendemos que esa forma de existencia es muy distinta a la forma de existencia de los objetos materiales. Mediante la experiencia matemática –poca o mucha–uno va desarrollando una intuición de lo que significa existencia matemática. Por ejemplo, si en los diarios de mañana aparece la noticia “los números naturales han desaparecido” tendremos la seguridad de que eso no es posible. Pero muy probablemente no podremos explicar formalmente esa certeza. Uno de los participantes aseguró que esa desaparición no era posible pues ella podía seguir contando sus pasos al caminar: 1, 2, 3, etcétera–en voz alta, además. Otros añadieron que siguiendo ese argumento tampoco podrían desaparecer las circunferencias porque con un compás o con un disco compacto, podían trazar las que quisieran. Aún más, el disco compacto ya viene con una circunferencia incorporada. Otros continuaron afirmando que puesto que podían dibujar rectas y otras curvas, tampoco podrían desaparecer las funciones. Y ¿las palabras del español?, preguntamos. Tampoco porque seguimos hablando... se nos tendría que olvidar el idioma a todos, concluyeron.

Casi sin darnos cuenta, sumergidos en la dinámica de nuestro medio social y cultural, somos iniciados en los números, los vemos aparecer ante nosotros por todas partes en el espacio cotidiano donde transcurre nuestra vida y terminan, esos números, teniendo una presencia incluso más estable que objetos materiales como las sillas de nuestra oficina. Si profundizamos en su estudio, descubrimos que hay por ejemplo, números primos. Son aquellos que no tienen divisores mayores que el número uno y que culquier número que no sea primo se puede expresar como producto de números primos. Ahora bien, este tipo de resultados son posibles porque tenemos una representación simbólica de los números perfectamente adaptada para la manipulación operatoria de los mismos. Tenemos una suma y una multiplicación y una forma de representar los números coherente con aquellas operaciones. Esto desde luego, no ocurrió “de repente” sino que es resultado del trabajo de generaciones incontables que a lo largo de la historia fueron encontrando cada vez mejores formas de representar las cantidades y de operar con ellas. Ese sistema que hoy denominamos sistema decimal es la cristalización de más de cinco mil años de esfuerzos. No habíamos respondido en el grupo el interrogante sobre existencia matemática, pero habíamos avanzado, según nuestra perspectiva, en abandonar la posición que afirma que los objetos matemáticos existen con independencia de los seres humanos. La reflexión sobre el sistema decimal nos ayudó a debilitar esa creencia sobre ideas matemáticas cuya existencia nada debe a los seres humanos.

A partir de aquí empezamos a explorar cuál podría ser la definición de un conjunto infinito actual. Si algo es muy grande (pero finito) se puede disminuir. Si se tiene una colección de 2^{200} elementos – aproximadamente el número de particulas elementales en el universo visible– y le quitamos un elemento, lo que queda es estrictamente menor que el original, aunque sea una diferencia insignificante. Si el conjunto original tiene $2^{20000000000}$ elementos, al quitarle uno, prácticamente no apreciamos la diferencia aunque en sentido estricto disminuye el número de elementos. Entonces, a medida que el conjunto considerado tiene muchos más elementos va revelando una cierta insensibilidad a la pérdida de “pocos” elementos –un número pequeño con respecto al tamaño original del conjunto. Sin embargo, si el conjunto original es pequeño, digamos que tiene 5 elementos, perder uno es una pérdida sensible.

Ahora bien, qué ocurre si de la lista de los naturales borrásemos todos los números impares? Sobreviven los pares, es decir los que pueden expresarse como múltiplos de 2, esto es son de la forma 2m, siendo m un natural arbitrario. La correspondencia 2m→m que divide entre 2 cada número par (expresado como 2m), permite afirmar que tenemos tantos números pares como naturales. Una participante en el laboratorio sugirió que la correspondencia 2m→m podía interpretarse como una lluvia: los pares "caen" sobre los naturales (pares e impares) y todos, sin excepción, quedan "mojados". No puede por lo tanto haber "menos" pares que naturales.

Esta es la característica esencial de un conjunto actualmente infinito: tiene subconjuntos propios con los que puede establecerse una correspondencia biunívoca. En el ejemplo previo, aún quitándole una parte infinita al conjunto de los naturales, la parte que queda, o sea el subconjunto de los pares, es "mismo tamaño" que el conjunto completo de los naturales ya que se pueden poner en correspondencia biunívoca, como las parejas en un baile: si ningún caballero se queda sentado, solo, sabremos de qué tamaño es el conjunto de caballeros: igual que el conjunto de sus parejas. Esta idea de establecer una correspondencia biunívoca puede parecer un tanto artificial pero vemos que no es así: tantos obsequios para tantas personas allegadas. No necesitamos contar para saber que ambos conjuntos son de igual tamaño.

Esta idea que en realidad es una fuerte intuición cognitiva, sirvió de base para encontrar una definición adecuada de conjunto infinito: una idea traída de nuestra experiencia y llevada al mundo virtual de las matemáticas. Esta discusión generó un interés pronunciado entre los participantes del laboratorio cuyos conocimientos y reflexiones previas no habían estado orientadas a tomar conciencia de cómo una idea tan (aparentemente) simple como es la correspondencia biyectiva entre dos conjuntos traía encerrada la llave para acceder al infinito actual que existe en esa realidad virtual llamada matemáticas. Entender genera entusiasmo: por su propia iniciativa hallaron que los cuadrados de los naturales también eran susceptibles de ponerse en correspondencia biyectiva con los naturales; que los pares y los impares también eran conjuntos infinitos equipotentes, es decir, que tenían igual número (infinito) de elementos.

e-ISSN: 2619-4791 • doi: 10.25100/praxis_educacion.v0i3.8793

Era el momento de reflexionar sobre cómo las intuiciones originales que ellos tenían sobre el número de elementos de un conjunto, que se obtenía contando, debían ser “olvidadas” cuando se trataba de conjuntos infinitos. *Lo veo pero no lo creo* escribió G. Cantor en 1877 (Zimmerman, 2013, p. 452) en una carta a R. Dedekind frente a este fenómeno de los conjuntos infinitos. Los participantes, como le había ocurrido a Cantor, lo veían pero se sentían forzados a aceptar (aunque no lo creyeran) este comportamiento de los conjuntos infinitos, que rompía con la añeja intuición de que el todo era siempre mayor que cada una de sus partes. Las intuiciones son instrumentos cognitivos que adquirimos a través de nuestra experiencia –cada uno tiene la suya– aunque no podamos hacerlas explícitas. No las podemos cambiar a voluntad. Ocurre que nuestras intuiciones (sobre un tema más o menos conocido por ejemplo) no están sometidas a un estricto control lógico-deductivo y por ello, su nivel de coherencia es local. Si decimos el todo es mayor que cada una de sus partes, nos parece aceptable hasta que recordamos o aprendemos que podemos poner en correspondencia los naturales con los pares. Entonces tenemos que fijar límites para esa proposición que parecía tan natural como para tomarla como universal. Empero, a través de la educación llega el momento cuando la parte lógica de nuestro pensamiento –de nuestra racionalidad– se impone sobre nuestras intuiciones, si se nos permite decirlo así. Aunque esta parte lógica de nuestro pensamiento esconde casi siempre (posiblemente siempre) una intuición que anda fragmentada o separada del tren inicial de nuestro pensar.

Para apreciar el esfuerzo de Cantor al luchar contra la corriente al introducir su definición de infinito actual, recordemos lo que escribió varias décadas antes una de las figuras cumbres de las matemáticas: C.F. Gauss, en 1831 escribió a su amigo Schumacher:

> Debo protestar vehementemente contra tu empleo del infinito como algo consumado, lo cual nunca es permitido en matemáticas. El infinito no es sino una figura del discurso; una forma abreviada para indicar que los límites existen…que otras magnitudes pueden aumentar sin cotas…no aparecerá ninguna contradicción mientras el Hombre Finito no entienda en infinito como algo fijo, mientras no sea llevado por un hábito adquirido de su mente a pensar el infinito como algo completo. (Dantzig, 1954, p. 211).

La cultura de una época nos provee de instrumentos para pensar y al mismo tiempo, nos encierra dentro de un mar de concepciones del que puede ser muy difícil escapar. Por ello decimos cuando estamos frente a un innovador que se ha adelantado a su tiempo, ha escapado de su tiempo. Cantor se adelantó a su tiempo. Afirmamos que este es uno de los resultados que marcaron un nuevo rumbo para las matemáticas –ya cerca del siglo XX– pero se constituye en una ¡obstrucción cognitiva para los participantes en nuestro laboratorio! Estas exploraciones, desde el punto de vista didáctico, dejaron en claro, insistamos, las dificultades de orden cognitivo que se erigen ante los participantes cuando transitan de unas ideas que prolongan otras previas con las que tienen un buen nivel de familiaridad o ideas nuevas que pueden ser entendidas con lo que hemos llamado inteligencia sensoriomotriz –experiencias corporizadas aún si ya están representadas simbólicamente. Se enfrentaron con dificultades matemáticas que no (siempre) pudieron superar.

Los nuevos conceptos tienen un aura más abstracta y sobre ellos se razona reconociendo que hay que seguir un camino marcado por las definiciones, pues estas son nuestra guía en el camino deductivo. Ahora bien, lo abstracto y lo concreto son relativos a la persona que intenta conocer: no son cualidades intrínsecas al conocimiento sino al conocer de la persona. Vimos que Cantor necesitó definir lo que iba a entender por conjunto infinito; sin esa definición no habría podido demostrar que el intervalo [0, 1] representaba un infinito mayor que el del conjunto de los números naturales y esto era así aunque él no lo creyera.

Somos seres híbridos

La experiencia con el infinito actual corroboró para nosotros la fisura que existe, para los participantes en nuestro laboratorio, entre un nivel de desarrollo matemático controlado por nuestra experiencia sensorio-motriz y los desarrollos posteriores que se conocen como la aritmetización de las matemáticas.

En el primer caso, la materia se desarrolla apoyándose fuertemente en la visualización, en razonamientos inductivos y heurísticos, como los que exploramos en las primeras secciones de este trabajo. Por ello los participantes que tenían cierto grado de experiencia con este nivel matemático, sintieron que la seguridad que tenían al estudiar y discutir problemas basándose en la visualización, el movimiento y las pequeñas variaciones (los infinitésimos), se diluía cuando pasaban a comparar conjuntos infinitos bajo la regla inflexible de la existencia de una correspondencia biunívoca. Casi no estaban acostumbrados a proceder deductivamente, a seguir reglas sin un sostén intuitivo. Habían tenido experiencia en trabajar deductivamente en el caso de la geometría, pero allí siempre había una figura que guiaba o acompañaba el razonamiento. Ahora esa figura estaba ausente.

En las páginas previas ya iniciamos una explicación sobre lo que entendíamos por una idea corporizada. Si pensamos en una curva continua, tenemos previamente la experiencia que proviene de deslizar la mano sobre una superficie de madera pulida o siguiendo con un dedo el borde de una mesa. Esas experiencias, y otras como deslizar un lápiz sobre una hoja de papel, nos facilitan comprender intuitivamente lo que significa la continuidad de la curva. En todos estos casos, es la experiencia sensorial y motriz la que nos da las bases para abstraer la idea de continuo. Si se añade el área bajo la curva la vemos sin mucho esfuerzo encerrada bajo la curva y sobre el eje de las abscisas. Podríamos multiplicar los ejemplos, pero pensamos que es suficiente lo explicado hasta aquí para que el lector tenga una idea de lo que entendemos por un primer nivel de matemáticas sensorio-motrices o matemáticas corporizadas. Las primeras secciones de este trabajo contienen muchos ejemplos. Una posible excepción: la solución de Euler al problema de Basilea. Allí Euler lleva hasta un límite el razonamiento por analogía en un contexto algebraico. Sin embargo, ese es otro aspecto que acompaña la idea de conocimiento corporizado.

La introducción al estudio de los conjuntos infinitos fue pensada para explorar, en nuestros laboratorios, una manera de razonar en matemáticas a partir de las definiciones formalizadas y bajo las reglas del método deductivo. René Thom, en una conferencia pronunciada en 1972 afirmó que el verdadero problema al que se enfrenta la enseñanza no es el rigor, sino el problema del desarrollo del significado y de la existencia de los objetos.

La crítica de Thom no es a ese proceso de refinamiento progresivo que ha ido sufriendo las matemáticas a través del cual se han tornado cada vez más rigurosas, sino a la subordinación acrítica de la didáctica de las matemáticas al nuevo estrato de conocimiento matemático. Muy diferente, bien entendido.

Durante siglos la geometría euclidiana fue concebida como una representación simbólica exacta del espacio físico. Es decir, el mapa (la geometría) coincidía con total exactitud con el territorio (el espacio físico). Las matemáticas, en general, eran concebidas de la misma manera y por lo tanto la intuición y la experiencia de la forma, la cantidad, la variación y la acumulación, por ejemplo, precedían sus versiones simbólicas, versiones simbólicas cuyo manejo y algoritmia estaban controlados por las interpretaciones intuitivas. Basta recordar los más de veinte siglos que tomó aceptar que por un punto exterior a una recta podían pasar más de una paralela. La intuición de una recta y su comportamiento, extraído de nuestra intuición y experiencia espacial local indican que solo es posible una paralela.

La lógica empleada constituía un canal por el que fluían las intuiciones y de allí surgían formas de razonar que gradualmente iban incorporando procesos deductivos. Pero las versiones simbólicas iban ganando una autonomía relativa y en cierta manera "olvidaban" las experiencias que les habían dado origen. Por ejemplo, durante largo tiempo se pensó que si una función no omitía ningún valor (de función) entre dos valores dados, entonces debía ser continua. Incluso ese rasgo de una función se tomó como equivalente a la continuidad. Sin embargo, pueden darse ejemplos de funciones discontinuas que gozan de esa propiedad. Llega un momento cuando la descripción intuitiva que tengamos entra en conflicto con la definición formal. A veces hay que cambiar la definición, a veces habrá que restringir nuestra intuición, pero cuando estamos en la institución escolar, tenemos frente a nosotros un cuerpo de conocimientos matemáticos ya elaborado: ¡Tenemos que re-educar nuestra intuición! Como nos enseñó Cantor con su ejemplo.

El investigador en neurociencias, Merlin Donald (2001), ha esta aparente separación de las experiencias intuitivas e informales de sus versiones posteriores articuladas simbólicamente así:

> Los seres humanos han tendido un puente entre dos mundos: somos híbridos, mitad analógicos –con acceso directo al mundo de nuestras experiencias– y mitad simbolizadores sumergidos en una red cultural. De alguna manera, durante el proceso evolutivo extendimos la capacidad analógica instalada en nuestro cerebro después de cientos de millones de años de evolución añadiendo nuestra capacidad simbólica y cultural. (p. 157).

Señalando la indisociabilidad del conocimiento analógico (implícito, intuitivo) y del conocimiento simbólico, puede advertirse que si bien los símbolos tienen un impacto cristalizador profundo sobre cómo sentimos el mundo, ellos terminan generando la ilusión de ser siempre la fuente de la experiencia misma. Sin embargo, los símbolos no son la fuente exclusiva de la experiencia. Más bien, como en un telar, los símbolos y la experiencia son como la trama y la urdimbre de nuestros conocimientos explícitos. Aquí se gesta una tensión entre los niveles analógicos de la experiencia y los niveles simbólicos de la experiencia.

El matemático norteamericano J. Pierpont (1899) lo describe, entrando al siglo XX, así:

> Tenemos dos mundos: el mundo de nuestros sentidos y de nuestra intuición y el mundo del número [...] el análisis de hoy [está] construido sobre la noción de número, y sus verdades son las más sólidamente establecidas dentro del conocimiento humano. Sin embargo, no hay que pasar por alto que el precio que debemos pagar por ello es terrible: la total separación del mundo de los sentidos. (p. 406).

El trabajo de Cantor sobre el infinito matemático es un ejemplo certero de esta transformación de las matemáticas: en su obra, las matemáticas corresponden a un universo abstracto, cristalizado simbólicamente pero que conserva una raíz intuitiva: el recurso a la correspondencia biunívoca, idea de repartir con justicia, digamos, una caja de chocolates entre dos niños. Claro, esta idea es llevada a un nivel superior de abstracción. Pero no es únicamente en las matemáticas el lugar donde los seres humanos crean universos simbólicos: una novela surgida de la imaginación de una/un novelista crea atmósferas ideales pero que reconocemos muchas veces como parte de nuestra vida cotidiana. Por ejemplo, Cien Años de Soledad una obra inmensa ha sido reconocida en muchos países como una narración casi textual de su vida cotidiana. De nuevo aquí apreciamos la tensión entre experiencia y sistematización simbólica en la imaginación del novelista.

El mundo híbrido en el que tenemos experiencias físicas/sensoriales y experiencias simbólicas es bidireccional. La lectura de una novela puede tener un impacto descomunal en la vida cotidiana de una persona; una palabra pronunciada en determinado contexto nos puede iluminar profundamente sobre su significado; el contacto intenso con la música transforma nuestras maneras de escuchar, incluso puede transformar cómo escuchamos sonidos provenientes del mundo natural.

> Las matemáticas tienen también esa doble naturaleza. No puede ser de otra manera. En sus primeras etapas, las matemáticas se han constituido casi siempre –si no es que siempre– a partir de procesos de representación simbólica de hechos naturales observados. Posiblemente encontremos los orígenes del número en la observación de la numerosidad del mundo que nos rodea. Así como vemos la diversidad, también vemos la forma, la variación de fenómenos naturales, la repetición de fenómenos periódicos y podemos continuar la lista. A partir del sentido básico de cantidad

incrustado en el sistema nervioso, el ser humano emplea su capacidad simbólica para ir elaborando un complejo sistema numérico (Tomasello, 1999).

Los participantes en nuestro laboratorio preguntan por razones que hayan llevado a los matemáticos de finales del siglo XIX y primeras décadas del XX a transformar las matemáticas sensorio-motrices en unas matemáticas formales y rigurosas con criterios de verificación que siguen de cerca las definiciones precisas que se suele ver en textos modernos. No podíamos entrar a una discusión exhaustiva sobre este tema, pero sí podíamos arrojar un poco de luz sobre él. La estrategia que elegimos fue plantear un problema a los participantes que les dejara ver la necesidad matemática, intrínseca, que hizo sentir la necesidad de revisar los criterios de validación que se habían seguido en la etapa sensorio-motriz.

Uno de los resultados que puede obtenerse a partir de la suma de la serie geométrica es que:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots$$

(válido para $|x|<1$, como se discutió mientras trabajamos con la serie geométrica. Procediendo formalmente (sin entrar a discutir si es válido) en lugar de x escribamos $-x$. Entonces se llega a

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots$$

Integrando término a término tenemos:

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

En esta expresión hacemos $x=1$ y se obtiene:

$$\log(2)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

El resultado es correcto como se vería más tarde. Con una buena calculadora los participantes sumaron hasta veinte términos y encontraron una "buena" aproximación al valor de log(2). Pero entonces propusimos multiplicar esta expresión por ½. Resultó:

$$\frac{1}{2}\log(2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\ldots$$

y sumando log(2) obtenemos:

$$\log(2)+\frac{1}{2}\log(2)=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots$$

Como los sumandos a la derecha en esta última expresión son los mismos que aparecen en la expresión de $\log(2)$, solo que en un orden distinto, podríamos entonces afirmar que:

$$\log(2)=\frac{3}{2}\log(2)$$

Y por lo tanto se concluiría que $\log(2)=0$. Una contradicción flagrante, así que no queda más remedio que aceptar que:

$$\log(2)\neq\frac{3}{2}\log(2)$$

Aquí estamos en presencia de un hecho que no podemos explicar en el marco de una matemática sensoriomotriz. La única salida es que la suma infinita

$$\frac{1}{2}\log(2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\ldots$$

Tenga un valor numérico diferente a la suma que representa a log(2). Pero entonces tendríamos que aceptar que al cambiar el orden de los términos se altera el valor de una suma infinita. Ese era un problema que iba a contracorriente de la idea fuertemente arraigada en nuestro entendimiento: el orden de los sumandos no altera el valor numérico de la suma, aunque haya sumandos con signo negativo. Esta propiedad dejaba de ser válida cuando en número de sumandos era infinito. Otra característica del infinito que demandaba que modificáramos nuestro entendimiento matemático basado en consideraciones sensoriomotrices. Este ejemplo fue discutido ampliamente como un momento del desarrollo matemático –de quienes participaban en nuestro laboratorio– que señalaba una ruptura. Llega el momento en que no es nuestra intuición la que nos guía en nuestras exploraciones matemáticas sino los símbolos y la manera de operarlos, como nos ilustra el ejemplo que acabamos de narrar. Cuando nuestra intuición sensoriomotriz es ajena a objetos como las sumas infinitas con signos positivos y negativos, no queda más remedio que iniciar su exploración guiados por los símbolos. A partir de allí, podremos desarrollar una intuición más refinada. Esa nueva intuición que denominamos intuición profunda permite que las ideas matemáticas se puedan compartir en el seno de una comunidad de práctica. La objetividad que alcanza una idea matemática puede atestiguarse cuando vemos un matemático experto, un topólogo digamos, pensando en un problema y dejando ver a través de su gestualidad cuán concreto puede ser ese espacio en el que piensa en ese momento. Casi se siente que lo tiene en sus manos.

El problema para la educación es que se suele presentar versiones de temas que aspiran al rigor pero olvidamos que quien aprende lo hace partiendo de sus experiencias y basándose en sus estructuras cognitivas. No es tan solo lo que se enseña sino lo que los estudiantes pueden aprender. Los participantes en nuestro laboratorio empezaban a sensibilizarse –en mayor o menor grado– sobre la ruptura entre las dos versiones de las matemáticas, desde el punto de vista del aprendizaje que habíamos estado discutiendo durante largos meses.

Coda

En noviembre de 1895, Felix Klein (1849-1925) pronunció una conferencia sobre La Aritmetización de las Matemáticas, en Gotinga. Esta conferencia apareció traducida al inglés en el Bulletin of the American Mathematical Society en 1896, donde afirma: "No respaldo que la ciencia aritmetizada sea la esencia de las matemáticas". (p. 242).

Viniendo de un matemático que había incursionado exitosamente en temas de la mayor abstracción y complejidad, esta afirmación no podía tomarse a la ligera. Ante la fuerza que ya había tomado en los últimos años del siglo XIX el programa de aritmetización desarrollado principalmente por Weiestrass, Dedekind y Cantor, Klein parecía lanzar una voz de alerta para que no se olvidara que las matemáticas tenían un sustrato intuitivo fundamental. Líneas más adelante afirma: "Debo ser muy enfático al afirmar que no es posible tratar a fondo las matemáticas exclusivamente mediante el método deductivo sino que aún hoy en día, la intuición tiene su provincia especial" (p. 242).

e-ISSN: 2619-4791 • doi: 10.25100/praxis_educacion.v0i3.8793

Estas palabras reflejan el estado de tensión intelectual que se vivía en los años finales del siglo XIX y primeras décadas del XX, cuando mediante la llamada aritmetización del cálculo se hizo explícito el primer paso hacia un cambio en la concepción de las matemáticas. Klein insiste en su proyecto del no-abandono del punto de vista intuitivo al presentar ejemplos de trabajos matemáticos con alta carga intuitiva pero respetados desde el nuevo paradigma. Klein se refiere a Riemann, por ejemplo, y se expresa en estos términos:

> No me puedo imaginar que Riemann haya visto la intuición geométrica al igual que lo hacen muchos representantes de las matemáticas hipermodernas, como algo contrario al espíritu matemático y que deba conducir a conclusiones erróneas. Por el contrario, Riemann debió pensar que en las dificultades que se presentan aquí, *es posible encontrar un terreno de conciliación.* (cursivas añadidas) (García Álvarez, 2005 p. 359).

Klein quien busca apoyo además en el conocimiento psicológico de su momento, afirma: "La psicología moderna distingue entre nuestras capacidades visuales, motoras y auditivas; la intuición matemática está más cercana a las capacidades visuales y motoras y el razonamiento lógico a lo auditivo". (Klein, 1896, p. 247)

Durante las primeras décadas del siglo pasado, F. Klein dedicó un esfuerzo sostenido a su trabajo docente. En 1908 publica el primer volumen de su obra *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint.* La cuarta edición del volumen I apareció en alemán en 1933. Estos libros (tres volúmenes) recogen una larga experiencia orientada a la preparación de profesores del nivel secundario. Klein fue pionero en el estudio de la cognición matemática enfatizando la necesaria vinculación entre el entendimiento intuitivo y el formal derivado de la aritmetización de las matemáticas. La toma de conciencia sobre la tensión entre intuición y formalismo en el seno de la cognición (matemática) pasaba por los cambios conceptuales que Klein veía ante sí con respecto a la naturaleza del conocimiento; parecía que el impulso hacia la organización deductiva dejaba atrás el método inductivo/empírico como la fuente del conocimiento matemático. Visto no solo desde la investigación en matemáticos del calibre de Riemann, sino desde la perspectiva de la formación de profesores (proyecto que ocupó una parte considerable de la energía de Klein) aquel impulso alrededor del enfoque deductivo a ultranza insinuaba la presencia de un obstáculo insalvable para la enseñanza.

Las preocupaciones que Klein exhibe en sus textos se pueden ver reflejadas hoy, parcialmente, en lo que se conoce como *Conocimiento Matemático del Profesor* (MKT por sus siglas en inglés). Su propuesta no era que los profesores aprendiesen (tal vez superficialmente) nuevos teoremas de matemáticas, sino que profundizaran sus conocimientos sobre las matemáticas que debían enseñar. Esto es, que desarrollaran una mejor comprensión de los conceptos que iban a enseñar en el salón de clases— y a quién se le iba a enseñar. Ese es el sentido de la expresión "conocimiento matemático del profesor": tener un conocimiento que se enseña que está controlado por un conocimiento del tema que permanece implícito (ante los ojos de los estudiantes) pero que es explicito para el profesor durante su trabajo pedagógico y durante la planeación de sus actividades. A Klein le preocupaba sobremanera que hubiese una grieta que separase el desarrollo de las matemáticas del pensamiento matemático cuando éste se instalaba en el salón de clases. Por ello volvía a la historia de las matemáticas como una oportunidad de reflexionar sobre la constitución del conocimiento y tal vez hallar algunas claves que permitieran aliviar los problemas de la enseñanza. En la introducción al volumen I puede hallarse la siguiente reflexión:

> El proceso normal de desarrollo de una ciencia es el siguiente: las partes superiores y más complejas se tornan gradualmente más elementales debido al incremento de la capacidad para comprender los conceptos y a la simplificación de su exposición. La escuela tiene entonces la tarea de verificar, debido a los requerimientos de la educación general, si la introducción de la versión ahora elemental de los conceptos en el curriculum es necesaria. (Klein, 1908, 2017, Introducción, p. ix).

Estas líneas nos hacen ver que subyacente al proceso de desarrollo histórico de las matemáticas se encuentra un proceso de reestructuración, de compresión de los conceptos y teorías. Bajo el efecto de este proceso emerge una nueva arquitectura del contenido matemático. Entonces *¿cómo conciliar esta nueva arquitectura con las demandas de la enseñanza?*

Es importante señalar que se trata de redefinir las matemáticas llamadas elementales como un campo de reflexión que lejos de ser superficial está orgánicamente vinculado con las matemáticas superiores. Klein desarrolla su concepción didáctica sin dejar de señalar lo que nosotros hoy llamaríamos el teorema de existencia del estudiante, en otros términos, la presencia gravitante de la cognición del estudiante durante el proceso de enseñanza/aprendizaje. La conclusión inmediata es la siguiente: el conocimiento matemático del profesor debe *fluir* condicionado por su conocimiento didáctico.

Por primera vez, de manera prolija, están expuestos en este volumen I los elementos de una pedagogía (nos atrevemos a pensar que muy probablemente Klein estaba concibiendo las líneas generales de una didáctica), que no ignora el carácter multidimensional de esta disciplina. En ese momento hay que traer a la atención del profesor un hecho central: que lo simple desde el punto de vista lógico no coincide necesariamente con lo familiar o natural desde el punto de vista intuitivo. Klein (1908, 2017) lo dice así:

> Con frecuencia se escucha decir que las matemáticas consisten en extraer conclusiones de premisas explicitas, sin importar lo que estas puedan significar, bajo la condición, claro, que dichas premisas no sean contradictorias entre sí… quien así piensa está restringiéndose al aspecto *cristalizado* de las matemáticas (p. 207).

Pero, continúa Klein, en la práctica de las matemáticas, como la de cualquier otra ciencia, se recurre al "razonamiento inductivo auxiliado por la heurística. Uno puede dar multitud de ejemplos de matemáticos que han descubierto resultados de mayor importancia que no pudieron demostrar. Entonces, ¿debería uno rehusarse a consideras esto como un gran aporte? (1908, 2017, p. 207).

Hay abundancia de pasajes en esta obra extraordinaria sobre la pertinencia educativa de los vínculos inducción/deducción y descubrimiento/formalización, y de la toma de conciencia de que el desarrollo histórico está motivado, como instrumento didáctico, por una dinámica de reorganización conceptual.

Cuando Klein escribió su obra, señalaba la pertinencia de tomar en cuenta futuros estudios sobre la cognición con el fin de refinar sus intuiciones sobre la naturaleza del proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Hay una insistencia en este acercamiento entre la enseñanza y los estudios sobre la cognición: "Es justamente en el descubrimiento y el desarrollo del cálculo infinitesimal que el proceso inductivo, construido sin recurrir a pasos lógicos, juega un gran papel; la ayuda heurística se traduce aquí a menudo como percepción sensorial." (1908, 2017, p. 226)

La sensibilidad pedagógica mostrada por Klein, ha encontrado eco en las investigaciones modernas relativas a la naturaleza corporizada (embodied) de las nociones matemáticas básicas (véase, por ejemplo, Lakoff y Nuñez: *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, 2000).

Sin embargo, con el paso del tiempo, la corriente de rigor formalista fue ganando terreno en el territorio de la enseñanza confundiendo la claridad lógica con la claridad cognitiva, distintas pero ambas partes sustanciales de nuestra naturaleza híbrida.

El investigador, dice Klein (1908, 2017) no trabaja de manera lineal mediante un exclusivo proceso deductivo. Por el contrario, recurre a su imaginación y procede de manera inductiva, heurística. Se pueden dar ejemplos de matemáticos que incluso no lograron demostrar formalmente un resultado (según los criterios modernos de rigor), pero cuya contribución tuvo tanto valor como la de una demostración rigurosa. Tal vez la figura más potente desde esta perspectiva sea Euler, del que hemos presentado resultados profundos en secciones anteriores. Los libros de Klein recogen una larga experiencia orientada a la preparación de profesores del nivel secundario. Klein fue pionero en el estudio de la cognición matemática enfatizando la necesaria vinculación entre el entendimiento intuitivo y el formal derivado de la aritmetización de las matemáticas. Visto desde la investigación y desde la perspectiva de la formación de profesores (proyecto que ocupó una parte considerable de la energía de Klein) aquel impulso alrededor del enfoque deductivo a ultranza insinuaba la presencia de un obstáculo insalvable para la enseñanza si ésta fuese colonizada sin más.

La resistencia ante la subordinación de la enseñanza a la organización deductiva de las matemáticas es un señalamiento a un hecho importante: no se trata solamente de conocer las matemáticas que se van a enseñar sino de conocer a quién se le va a enseñar.

Y Vygodsky, notable pedagogo, recibió en la década de los treinta del siglo pasado fuertes críticas del mundo académico de Moscú por el enfoque que daba en su libro a la enseñanza del cálculo. Basándose en su experiencia docente, Vygodsky afirmaba (Demidov y Shenitzer, 2000):

> Escribí este libro pues es mi profunda convicción que ninguno de los textos existentes presenta las ideas de los infinitésimos con la necesaria claridad para los estudiantes. La razón para ello es que comparten en el fondo un enfoque que considero equivocado y perjudical. Específicamente, en todos ellos, los *conceptos fundamentales del cálculo* se presentan de manera lógica y formal. No importa qué tanto intenten simplificar las demostraciones para evitar el rigor formal, qué tanto recurran a las imágenes intuitivas, en el fondo intentan explicar el esquema moderno del análisis…Como resultado los conceptos fundamentales del análisis aparecen, no

> en su evolución sino congelados. Esta es la razón detrás del hecho deprimente que el análisis aparece como un cadáver en manos de los estudiantes… las demostraciones son incontrovertibles y a pesar de ello… *no logran convencer*. (cursivas añadidas) (p. 65).

Este texto fue escrito hace 90 años y nada —o muy poco—parece haber cambiado en los sistemas escolares. Han cambiado los textos, pero los problemas que enfrentan los estudiantes parecen congelados en el tiempo. Vygodsky añade entonces que el punto de vista que subyace a su texto toma en cuenta una perspectiva que nosotros aquí denominamos sensoriomotriz en lugar del esquema de rigor lógico que ya estaba establecido y que respondía a necesidades de las matemáticas mismas y no necesariamente a las necesidades de los estudiantes. Es un punto de vista con el que Vygodsky coincidía como matemático, pero que no respondía a las necesidades cognitivas de los estudiantes, es decir, de quienes intentan acceder a un fragmento –por lo menos– del conocimiento matemático. Si bien las estrategias educativas no deben subordinar sus objetivos a la lógica del desarrollo matemático en sí mismo, tampoco pueden ignorarlo. Hay que encontrar como aspiraba Klein, un territorio de conciliación.

Notas

[1] Investigador titular CINVESTAV-México.

[2] Mg. en Ciencias, Dpto. Matemática Educativa, CINVESTAV. Estudiante del Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV.

Referencias bibliográficas

Arquímedes. (2006). El Método, una carta reveladora de Arquímedes a Eratóstenes. *Revista Suma*, 53, 69-73.

Byers, W. (2007). *How Mathematicians Think*. Princeton Univ.Press.

Dantzig T.D. (1954). *Number: The Language of Science*, 4th ed. N. York: Free Press.

Demidov, S. S., y Shenitzer, A. (2000). *Two letters by N.N.* Luzin to M.Ya. Vigodskii. *The American Mathematical Monthly*, *107*(1), 64–82.

Edwards, C.H. (1979). *The Historical Development of Calculus.* New York: Springer-Verlag.

García Álvarez, M. (2005). *Introducción a la Teoría de la Probabilidad*. México: Fondo de Cultura Económica (FCE).

Heath, T. L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid´s Elements.* Cambridge: Cambridge University Press (Dover reprint).

Hairer, E., y Wanner, G. (1995). *Analysis by its History*. New York: Springer-Verlag.

Klein, F. (1896). The arithmetizing of mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society (BAMS),* 3, 241-249.

Klein, F. (1908, 2017). *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint, (nueva traducción al inglés de G.* Schubring. New York: Springer-Verlag.

Lakoff, G., y Nuñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books.

L Hôpital, G. (1998). *Análisis de los infinitamente pequeños.* México: UNAM, Facultad de Ciencias.

M. Donald. (2001). *A Mind so Rare*. Norton, New York.

Newton, I. (1999). *The Principia* (obra original de 1687). Estados Unidos: University of California Press.

Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Inference.* Princeton: University Press.

Pierpont, J. (1899). On the arithmetization of mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *5*(8), 394-406.

Thom, R. (1972). Modern mathematics: does it exist? In A. G. Howson (Ed.), *Development in mathematical education. Proceedings of the second international congress on mathematical education* (pp. 159–209). Cambridge: Cambridge Univ. Press

Tomasello, M. (1999). *The cultural origins of human cognition.* Cambridge: Harvard University Press.

Zimmerman, S. (2013). I believe it, but I don ́t see it. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *44*(3), 452-456.